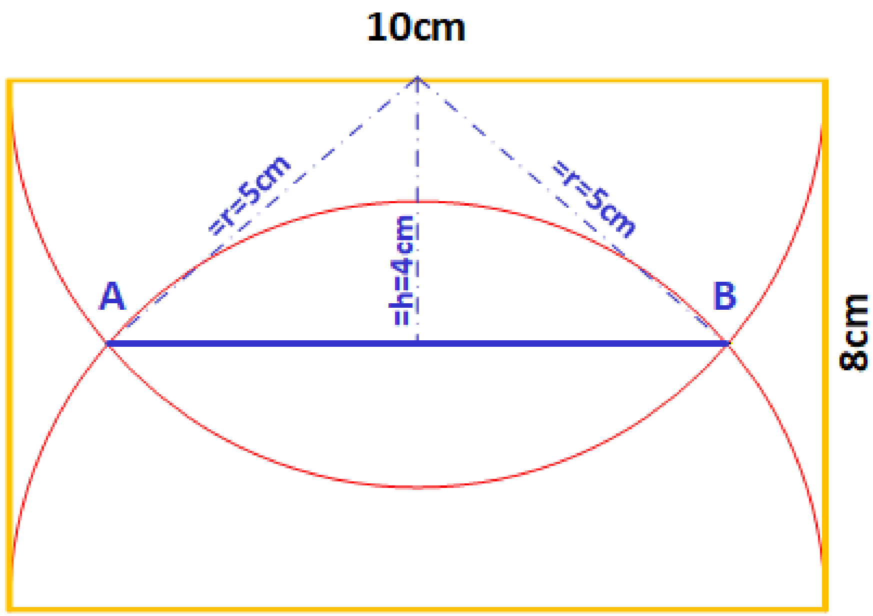
Liebe Leserinnen und Leser! Grundschüler, Realschüler, Gesellen, Handwerker und Facharbeiter. Hallo du! Ja, genau >>du<<. Ich muss ehrlich zugeben: Das Ganze war für mich eine echte Herausforderung! Es sind doch einige Seiten geworden, und das Formatieren der vielen Formeln in Microsoft Word hat mich zeitweise ganz schön ins Schwitzen gebracht. Ich habe mir zwar große Mühe gegeben, alles logisch und nachvollziehbar aufzubauen, aber bei der Menge an Zahlen und Symbolen kann ich leider nicht garantieren, dass alles absolut fehlerfrei ist. Sieh es bitte eher als eine Arbeitsgrundlage und nicht als unfehlbare Lösung.

❶ *Lösung Strecke AB.*



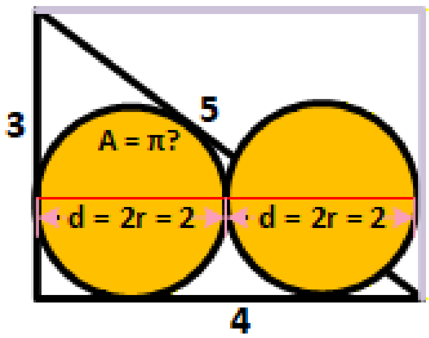
$$AB=\sqrt{r^2-h^2}*2$$

AB = $\left(\sqrt{5^2-4^2}\right)*2=\left(\sqrt{25-16}\right)*2=\ \sqrt{9}$ *** 2 = 6cm**

❷ *Lösung Kreis im Dreieck.*

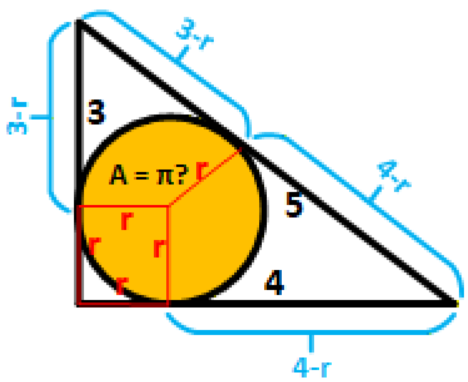
Lösung nur durch Überlegung!

Wenn A = π, dann muss der Radius r=1 sein! $A(kreis)=\ \pi=r^2*\ \pi=1^2*\ \pi$



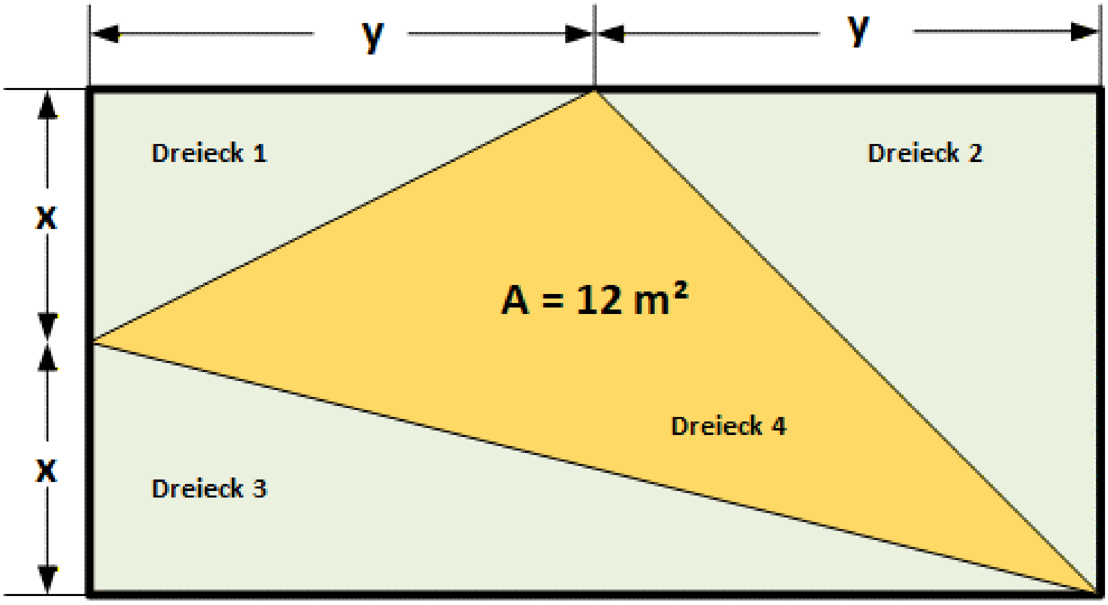
Wenn Radius r=1, dann ist der Durchmesser d=2. Zwei Kreise mit d=2 kann man exakt auf die Grundlinie des Dreiecks (4) platzieren. Die Aussage ist richtig:

$$A(kreis)=\pi$$



$$3-r+4-r=5$$
$$7-2r=5$$
$$-2r=5-7$$
$$-2r=-2$$
$$r=1$$

❸ *Lösung Dreieck im Rechteck*

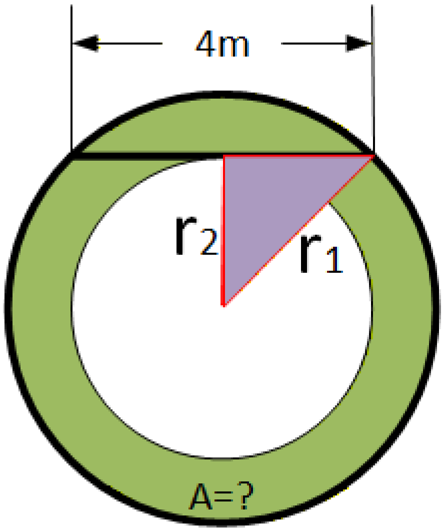


$$A(Rechteck) = 2x * 2y$$
$$A(Rechteck) = A(Dreieck\,1) + A(Dreieck\,2) + A(Dreieck\,3) + 12\,m^2$$

$$2x * 2y = \frac{x * y}{2} + \frac{2x * y}{2} + \frac{x * 2y}{2} + 12$$
$$4xy = \frac{xy}{2} + \frac{2x * y}{2} + \frac{x * 2y}{2} + 12$$
$$4xy = \frac{xy}{2} + xy + xy + 12$$
$$4xy - \frac{1}{2}xy - xy - xy = 12$$
$$1{,}5\,xy = 12$$
$$xy = \frac{12}{1{,}5} = 8$$

$$A(Rechteck) = 2x * 2y = 4xy = 4 * 8 = 32\,m^2$$

❹ *Lösung Kreisring.*



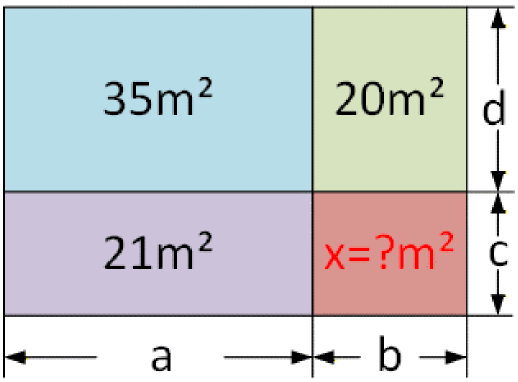
$$A = r^2 * \pi$$
$$A(Ring) = A(gr\ Kreis) - A(kl\ Kreis)$$
$$r1^2 = r2^2 + (2m)^2$$
$$r1^2 - r2^2 = (2m)^2$$
$$r1^2 - r2^2 = 4m^2$$
$$Aring = r1^2 * \pi - r2^2 * \pi$$
$$Aring = \pi(r1^2 - r2^2)$$
$$Aring = \pi * 4m^2 = 4\pi$$
$$Aring = 12{,}5m^2$$

❺ *Lösung vier Rechtecke.*

Erster Lösungsweg: Verhältnisgleichung aufstellen. Das Verhältnis x zu 20m² ist gleich das Verhältnis 21m² zu 35m²

$$x : 20m^2 = 21m^2 : 35m^2$$

$$\frac{x}{20} = \frac{21}{35} \rightarrow x = \frac{21*20}{35} = 12m^2$$



$$ad = 35\ ;\ ac = 21\ ;\ bd = 20$$
$$bc = x\ ;\ bc = ?$$
$$\frac{ac}{ad} = \frac{21}{35} \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{3}{5}$$
$$bd = 20 \rightarrow b = \frac{20}{d}$$

$$x = bc \rightarrow x = \frac{20}{d} * c \rightarrow x = 20 * \frac{c}{d} \rightarrow x = 20 * \frac{3}{5} = 12m^2$$

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

❻ *Lösung Becher.*

Becher = x, Teilbecher (abgedeckt) = y

$x + y = 19 \rightarrow y = 19 - x$

$x + 4y = 34 \rightarrow x + 4(19 - x) = 34$

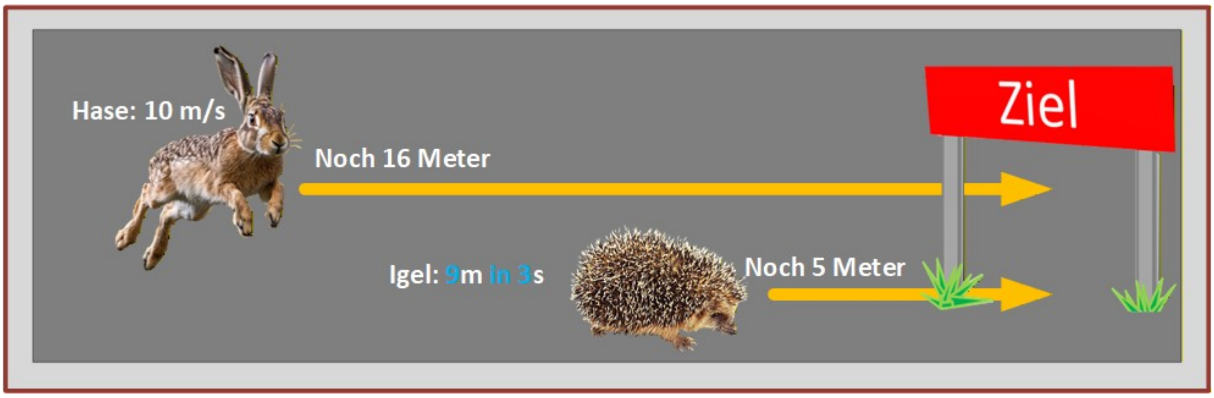
$x + 76 - 4x = 34 \rightarrow -3x = -42$

$3x = 42 \rightarrow x = \frac{42}{3} = 14$

Der Becher ist 14 cm hoch

❼ *Lösung Geschwindigkeit – Wettrennen*

.



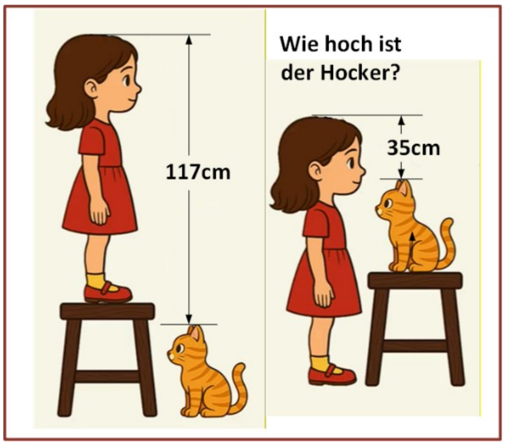
Wettrennen zwischen Hasen und Igel! Der Hase hat dem Igel einen Vorsprung gegeben. Dem Igel fehlen nur noch 5 Meter bis er das Ziel erreicht. Dagegen fehlen dem Hasen noch 16 Meter bis zur Ziellinie. Der Hase ist zwar deutlich schneller, aber reicht das, um die Maus noch zu überholen?

Igel: 9 Meter in 3 Sekunden entspricht $\frac{x}{3}\frac{s}{s} : \frac{1m}{9m} = \frac{1m * 3s}{9m} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}s$ **für einen Meter! Für 5 Meter** $\frac{1}{3}s * 5m = \frac{5}{3}s$

Hase: 10 Meter pro Sekunde entspricht $\frac{x}{1}\frac{s}{s} : \frac{1m}{10m} = \frac{1m * 1s}{10m} = \frac{1}{10}$ **für einen Meter! Für 16 Meter** $\frac{1}{10}s * 16m = \frac{16}{10}s = \frac{8}{5}$

Vergleich Igel und Hase → $\frac{5}{3} : \frac{8}{5} = \frac{25}{15} : \frac{24}{15}$ **→ Der Hase hat es tatsächlich noch geschafft,** $\frac{1}{15}$ *Sekunde schneller*.

8 *Lösung Hocker*



Definition: Hocker = x. Katze = y. Mädchen = z.

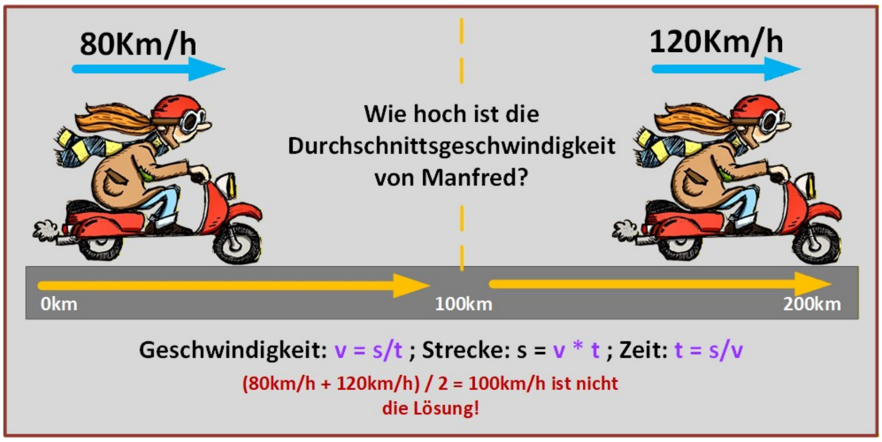
$$x + y \; + \; 35 = z$$

$$117 + y - x \; = z$$

$$x + y \; + \; 35 = 117 + y - x$$
$$x + x = 117 - 35 - y + y$$
$$2x = 117 - 35$$
$$x = \frac{117 - 35}{2} = \frac{82}{2} = 41$$

Hocker = x = 41 cm hoch.

9 *Lösung* Durchschnittsgeschwindigkeit



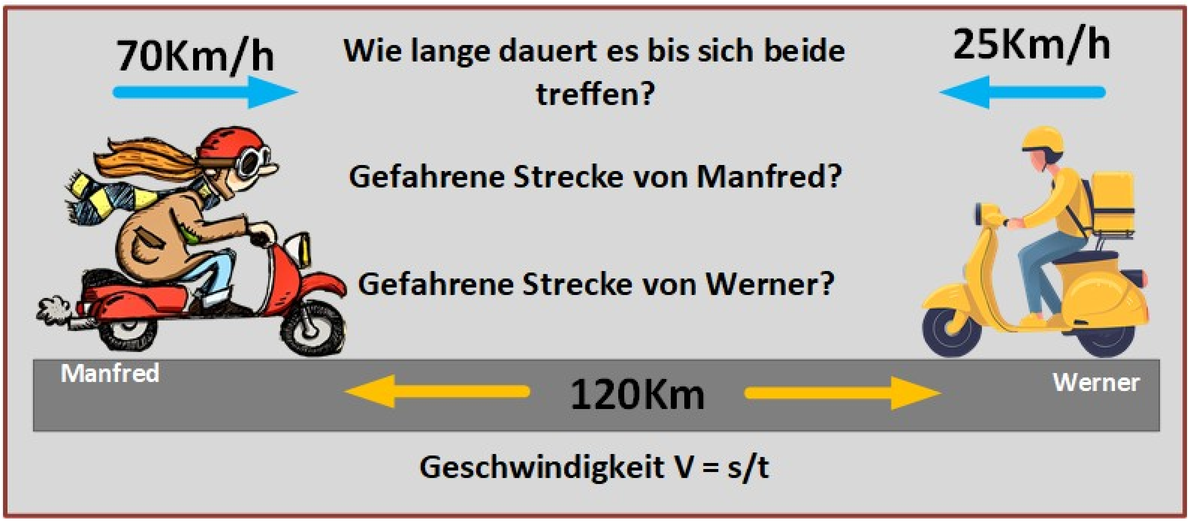
Manfred fährt 100 km mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h. Die nächsten 100 km fährt er mit 120 km/h. Will man die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen, darf man nicht das arithmetische Mittel nehmen. Bei solchen Situationen braucht man das harmonische Mittel, das berücksichtigt, dass die Geschwindigkeit ein Verhältnis ausdrückt.

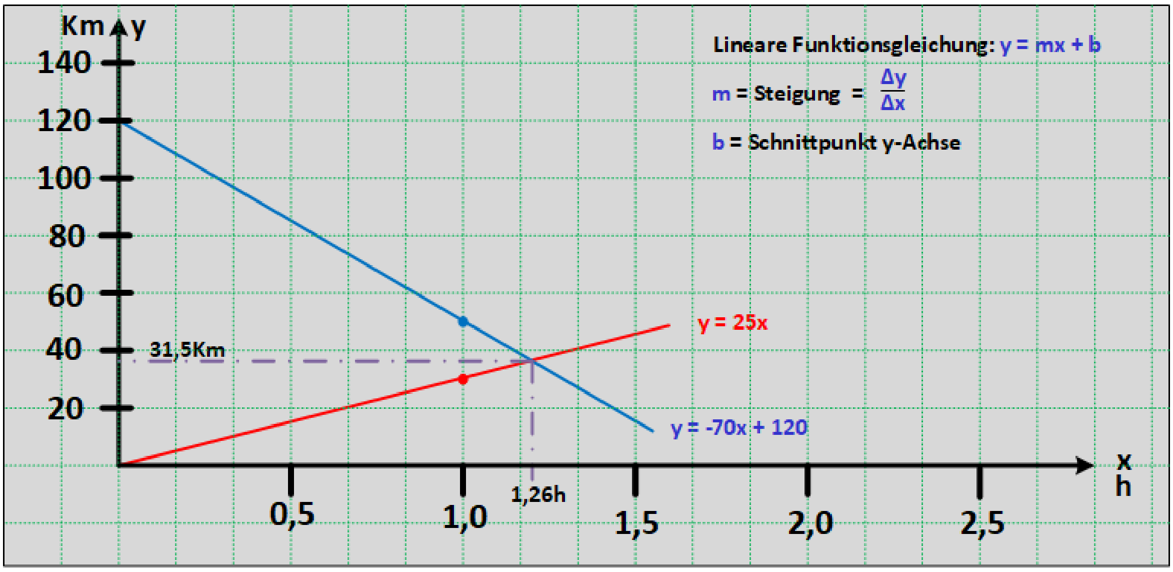
$$\frac{100\,km}{80\,\frac{km}{h}} + \frac{100\,km}{120\,\frac{km}{h}} = \frac{10}{8}h + \frac{10}{12}h = \frac{5}{4}h + \frac{5}{6}h = \frac{25}{12}h$$

$$\frac{200\,km}{\frac{25}{12}h} = 200\,km * \frac{12}{25}h = 96\,\frac{km}{h}$$

die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $96\,\frac{km}{h}$

⑩ *Lösung*, Geschwindigkeit - Treffen





$y = 25x$ **/ Werner** $\quad y = -70x + 120$ **/ Manfred**

$25x = -70x + 120$ **/ Gleichsetzungsverfahren**

$70x + 25x = 120 \rightarrow 95x = 120 \quad \rightarrow x = \frac{120}{95} = 1{,}26$

Sie treffen sich nach 1,26 Stunden! Das müssen wir noch in eine verständliche Aussage bringen: 1 Stunde, 15 Minuten und 36 Sekunden!

[1 Stunde + (0,26 * 60) = 15,6 = 15 Minuten + (0,6 * 60) = 36 Sekunden]

$v = \frac{s}{t} \quad \rightarrow s = v * t = 70\frac{km}{h} * 1{,}26\,h = 88{,}2 \quad km$ **Strecke Manfred**

$v = \frac{s}{t} \quad \rightarrow s = v * t = 25\frac{km}{h} * 1{,}26\,h = 31{,}5 \quad km$ **Strecke Werner**

Bewegen sich zwei Objekte mit unterschiedlichen Durchschnittsgeschwindigkeiten aufeinander zu, dann wird grundsätzlich die gesamte Strecke (hier 120 km) absolviert. Diese gesamte Strecke wird mit der Geschwindigkeit *beider* Objekte gefahren. Dieser

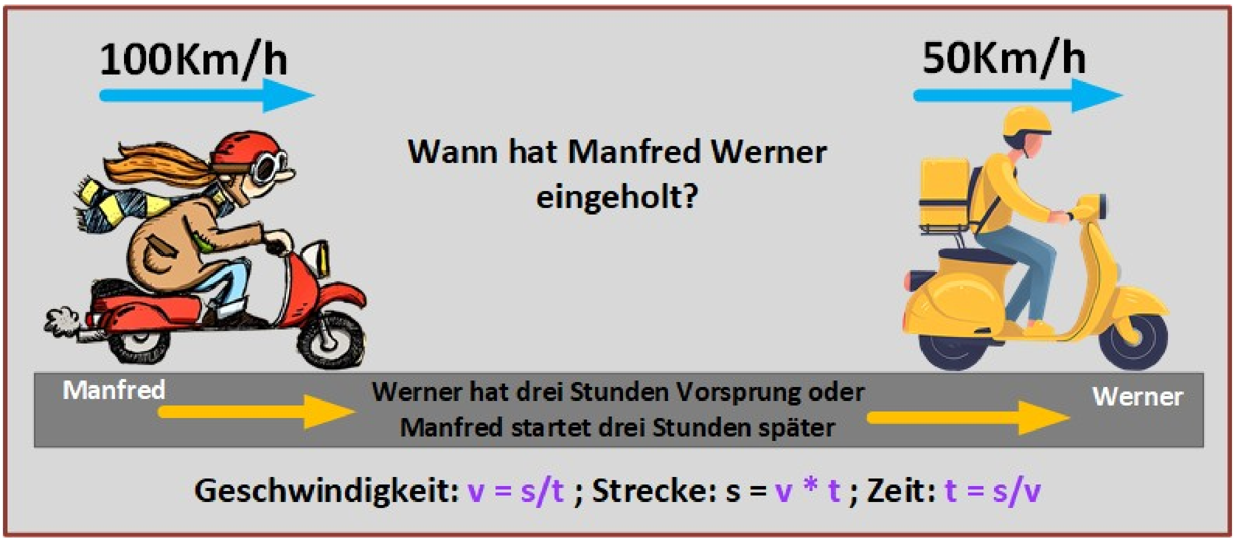
Sachverhalt führt zu einer Addition der Geschwindigkeiten! Ein anderer Lösungsweg sieht dann so aus:

$$V\left[\frac{km}{h}\right]=\frac{s[km]}{t[h]} \rightarrow t=\frac{s[km]}{V\frac{[km]}{[h]}}=\frac{120\ km}{\left(70\frac{km}{h}+25\frac{km}{h}\right)}=1{,}26\,h$$

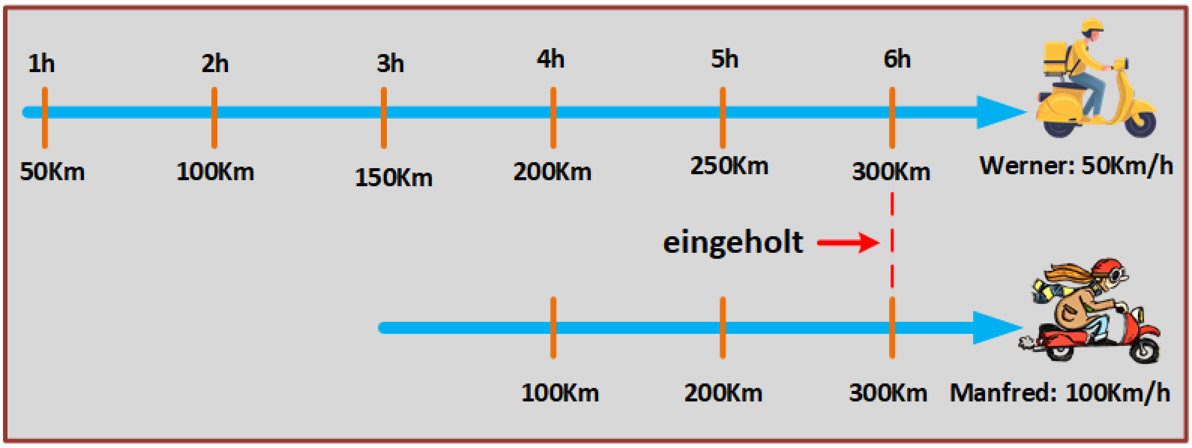
Sie treffen sich nach 1,26 Stunden! Das müssen wir noch in eine verständliche Aussage bringen: 1 Stunde, 15 Minuten und 36 Sekunden!

[1 Stunde + (0,26 * 60) = 15,6 = 15 Minuten + (0,6 * 60) = 36 Sekunden]

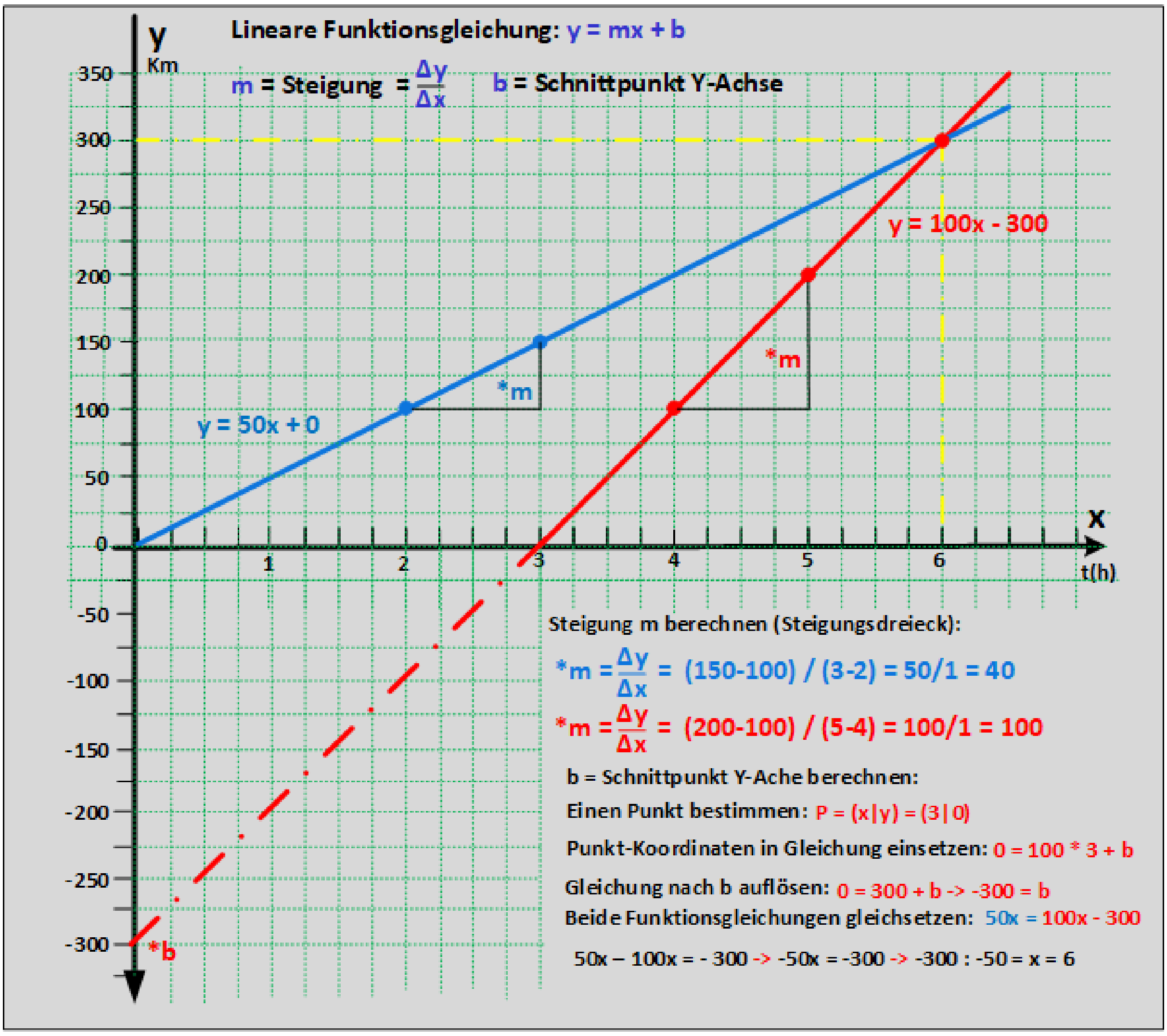
⑪ *Lösung,* Geschwindigkeit – Einholen



Da muss ich nicht rechnen! Manfred fährt doppelt so schnell als Werner und damit ist die Zeit überschaubar. Das löse ich mit einem Zahlenstrahl bzw. Strecke. So die Aussage meiner Frau. Ihre Skizze hier etwas verfeinert:



Eine weitere zeichnerische Lösung sieht folgendermaßen aus:



Ein Koordinatensystem erstellen. Es ist ein System zur eindeutigen Bestimmung von Punkten durch Zahlen, sogenannte Koordinaten. Es wird in der Praxis oft als kartesisches System mit zwei x- und y-Achsen verwendet. In unserem Fall ist die y-Ache die Strecke s, und die x-Achse die Zeit t. Werner startet zum Zeitpunkt Null, somit ist die erste Koordinate P = (y | x) = (0 | 0). Für den zweiten Punkt wählen wir P = (y | x) = (100 | 2). Diese beiden Punkte verbinden wir mit einer Geraden. Werners Gerade (blau) ist nun erstellt. Manfred startet nach drei Stunden, somit ist die erste Koordinate P = (y | x) = (0 | 3), die 2. Koordinate P = (y | x) = (100 | 4). Auch hier verbinden wir die beiden Punkte. Manfreds Gerade (rot) ist nun auch eingezeichnet und wir stellen fest, dass sie sich überschneiden, P = (y | x) = (300 | 6). Daraus leiten wir eine Lösung ab: Nach drei Stunden Fahrzeit und einer Strecke von 300 Kilometer hat Manfred Werner eingeholt. Werner war 6 Stunden unterwegs, Manfred 3 Stunden.

Sind die Zahlen größer und/oder bestehen aus Brüchen dann muss man andere Methoden zur Lösung heranziehen. Es gibt zwei Möglichkeiten diese Einhohlgeschwindigkeits-Aufgabe mit Gleichungen zu lösen.

Zuerst bleiben wir bei der Zeichnung oben und verfeinern die Lineare Funktion. Dafür müssen wir uns das Bild noch einmal genau anschauen. Die Funktionsgleichung lautet: y = mx + b. y ist in unserem Fall die Strecke s, x ist die Zeit t, m ist die Steigung (Steigungsdreieck) und b ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Für Werner ist

der Startzeitpunkt Null (P = (y | x) = (0 | 0) und die Gleichung für Werner lautet: y = mx + b = 50x + 0 = 50x. Die Zahl 50 entspricht m und ist die Steigung der Geraden. Das obige Bild zeigt die Berechnung. Manfred hat ein „b“! Manfreds Gerade schneidet die y-Achse bei -300! Wie wird das berechnet? Schaue genau auf das Bild, rechts unten! Setzt man die beiden Gleichungen gleich so erhält man die Lösung.

$$50x = 100x + (-300)$$
$$0 = -50x + 100x - 300$$
$$300 = 50x$$
$$\frac{300}{50} = x = 6$$

Viele Menschen, so wie ich, haben nur gelegentlich mit so einem Thema zu tun. Leute die sich häufiger damit beschäftigen, wählen folgenden Weg:

Schritt 1: Grundgleichung → Strecke „Werner“ = Strecke „Manfred“

Strecke = Geschwindigkeit * Zeit

Schritt 2: Variablen definieren

x = Zeit, in der Manfred Werner einholt.

Strecke Werner ist 50 * x **Strecke Manfred ist 100 * x**

Schritt 3: Gleichung für die Einhohl-Aufgabe

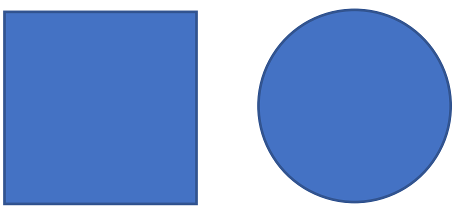
50x = 100 * (x – 3)

Manfred startet 3 Stunden später! Das formulieren wir in der Gleichung so, dass wir x in Klammern setzen und 3 Stunden abziehen!

$$50x = 100(x - 3)$$
$$50x = 100x - 300$$
$$0 = 50x - 300$$
$$300 = 50x$$
$$\frac{300}{50} = x = 6$$

⓬ *Lösung,* Kreis & Quadrat

Kreis und Quadrat haben den gleichen Umfang! Ist der Flächeninhalt auch gleich?



$U = 4a$ **/ Umfang Quadrat**

$U = 2\pi r$ **/ Umfang Kreis**

$A = a^2$ **/ Fläche Quadrat**

$A = r^2 \pi$ **/ Fläche Kreis**

$U_{Kreis} = U_{Quadrat}$ $\quad 2\pi r = 4a \rightarrow r = \frac{4a}{2\pi} \rightarrow r = \frac{2a}{\pi}$

$$A_{Kreis} = \pi \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \pi \frac{4a^2}{\pi^2} = \frac{4}{\pi} a^2$$

$\frac{4}{\pi} > 1$ **Die Fläche des Quadrates ist kleiner!**

13 *Lösung,* Spannungsteiler

$$\frac{u-u2}{r1}-\frac{u2}{r2}-\frac{u2}{r3}=0$$

$$\frac{(u-u2)*r1*r2*r3}{r1}-\frac{u2*r1*r2*r3}{r2}-\frac{u2*r1*r2*r3}{r3}=0*r1*r2*r3$$

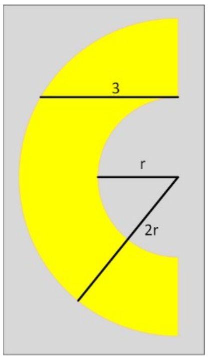
$$u*r2*r3-u2*r2*r3-u2*r1*r3-u2*r1*r3=0$$

$$u*r2*r3=u2*r2*r3-u2*r1*r3-u2*r1*r3$$

$$u*r2*r3=u2(r2*r3-r1*r3-r1*r3)$$

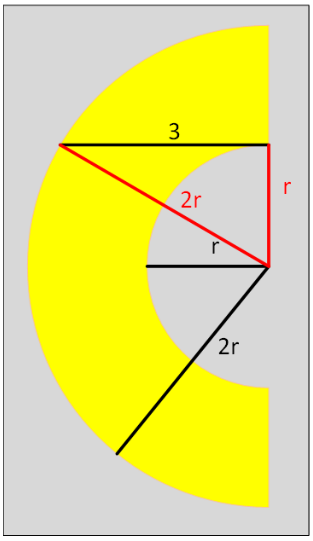
$$\frac{u*r2*r3}{r2*r3+r1*r3+r1*r2}=u2$$

14 *Lösung,* zwei Halbkreise



$$A=\frac{A\_groß-A\_klein}{2} \qquad A=\frac{\pi*(2r)^2-\pi*r^2}{2}$$

$$A=\frac{\pi((2r)^2-r^2)}{2}$$



$$c^2=a^2+b^2 \rightarrow Pythagoras \rightarrow (2r)^2=3^2+r^2$$

$$4r^2=9+r^2 \rightarrow 4r^2-r^2=9$$

$$r^2(4-1)=9 \rightarrow r^2=\frac{9}{(4-1)} \qquad r=\sqrt{3}$$

$$A=\frac{\pi((2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2)}{2}=\frac{\pi(4*3-3)}{2}=\frac{\pi*9}{2}$$

$$A=\frac{9\pi}{2}=\frac{9}{2}\pi \sim 14{,}1$$

⑮ *Lösung,* Jahreszinsen -1-

Wie hoch sind die Jahreszinsen für ein Darlehen über 15200€, wenn ein Zinssatz von 4,6% vereinbart wurde?

$$Z = K\frac{p}{100} = 15200\frac{4{,}6}{100} = 699{,}2\,€$$

Z = Jahreszinsen, K = Kapital
p = Prozentsatz

Dreisatz!

↓: 100	**100%**	**15200€**	**↓: 100**
→	**1%**	**152€**	**←**
→	**4,6%**	**699,2€**	**←**

⑯ *Lösung,* Jahreszinsen -2-

Wie hoch sind die Jahreszinsen für ein Sparguthaben über 15200€, wenn ein Zinssatz von 1,4% vereinbart wurde?

$$Z = K\frac{p}{100} = 15200\frac{1{,}4}{100} = 212{,}8\,€$$

Z = Jahreszinsen, K = Kapital
p = Prozentsatz

⑰ *Lösung,* Jahreszinsen Tage

22000€ wurden zu einem Zinssatz von 1,2% angelegt. Wie viel Zinsen nach 72 Tagen?

$$Z = 22000 * \frac{1{,}2}{100} * \frac{72}{360} = 53€$$

⑱ *Lösung,* Jahreszinsen Maria

Maria hat 250€ auf ihrem Konto und Uta besitzt 10€ mehr. Bei Maria ist der Zinssatz 1,15%, Uta hingegen erhält 0,2% weniger Zins als Maria. Nach wie vielen Jahren hätte Maria das erste Mal mehr Geld auf ihrem Konto?

$$Kn = Ko * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

Ko = Anfangskapital, Kn = Kapital nach n Jahren,
n = Anzahl der Jahre!

q = Zinsfaktor, p = Zinssatz

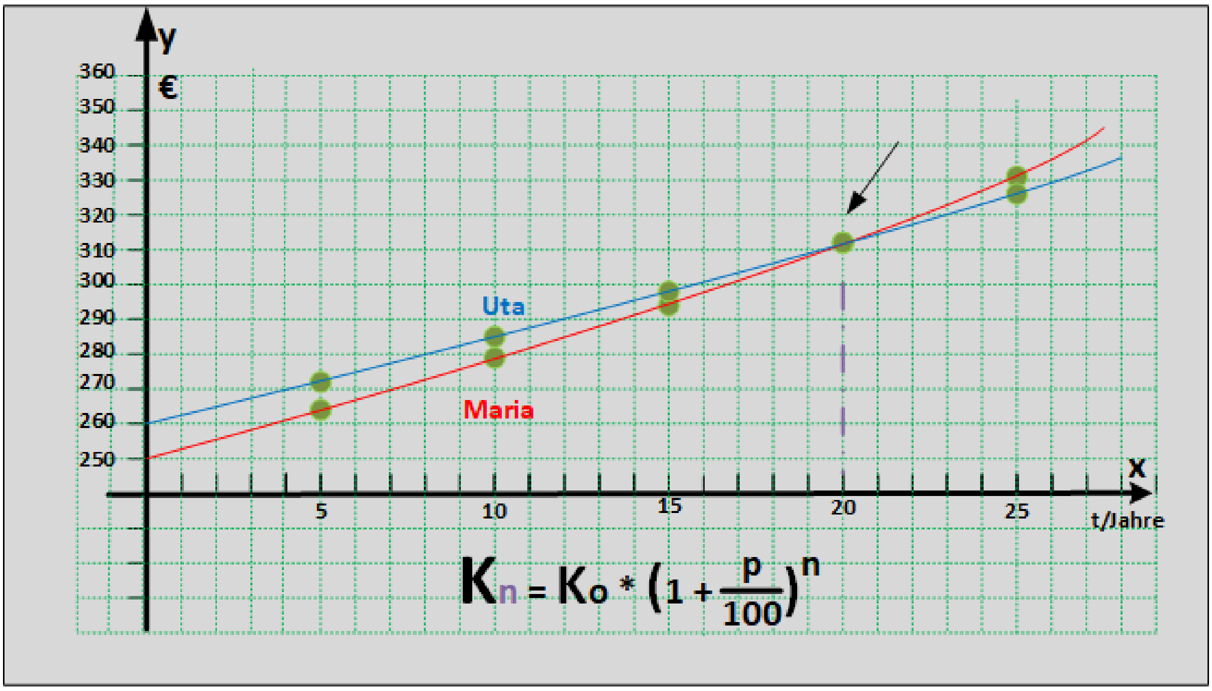
Maria: Ko = 250€, p = 1,15% → q = 1,0115

Uta: Ko = 260€, p = 1,15% - 0,2% = 0,95% → q = 1,0095

$$250 * 1{,}0115^x = 260 * 1{,}0095^x \qquad \textbf{/:260 - :1,0115}$$

$$\frac{250}{260} = \frac{1{,}0095^x}{1{,}0115^x} \rightarrow \frac{250}{260} = \left(\frac{1{,}0095}{1{,}0115}\right)^x \rightarrow \log_{\frac{1{,}0095}{1{,}0115}}\left(\frac{250}{260}\right) = x$$

$$\log_{\frac{1{,}0095}{1{,}0115}}\left(\frac{250}{260}\right) = 19{,}8 \approx 20 \;\; Jahre$$

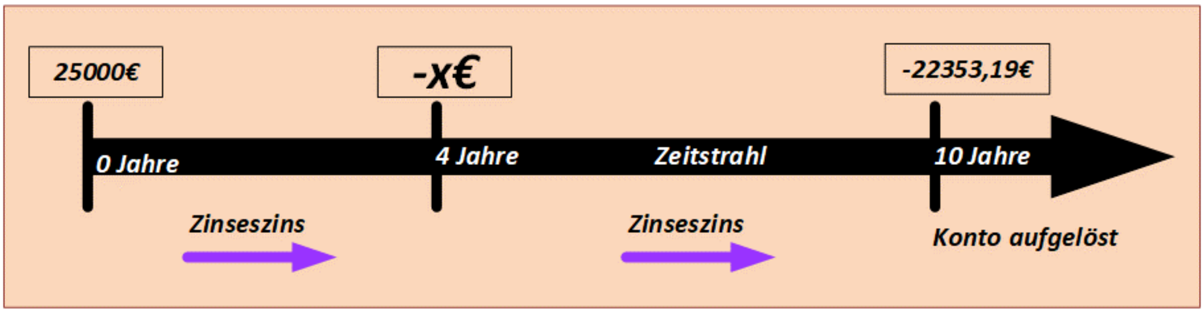


19 *Lösung,* Jahreszinsen E-Bike

Ich habe auf meinem Konto einen Betrag von 25000€ bei einem Zinssatze von 0,8%. Nach 4 Jahren beziehe ich Geld für ein neues E-Bike. Nach weiteren 6 Jahren löse ich das Konto auf und erhalte 22353,19€. Wie groß war der Betrag für den Kauf meines E-Bikes?

$$Kn = Ko * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \rightarrow q = 1 + \frac{p}{100} \rightarrow Kn = Ko * q^n$$

$$q = 1 + \frac{0{,}8}{100} = 1{,}008$$



$$\left(25000\,€ * 1{,}008^4 - x\right) * 1{,}008^6 - 22353{,}19\,€ = 0$$

$$\left(25000\,€ * 1{,}008^4 - x\right) * 1{,}008^6 - 22353{,}19\,€ = 0 \qquad \textbf{/+22353,19}$$

$$\left(25000\,€ * 1{,}008^4 - x\right) * 1{,}008^6 = 22353{,}19\,€$$

$$\left(25000\,€ * \;1{,}008^4 * 1{,}008^6\; - x * \;1{,}008^6\right) = \;22353{,}19\,€$$

$$25000\,€ * \;1{,}008^{10} - x * \;1{,}008^6 = 22353{,}19\,€$$

$$27073{,}56\,€ - x * \;1{,}008^6 = \;22353{,}19\,€$$

$$-x * \;1{,}008^6 = \;22353{,}19\,€ - \;27073{,}56\,€$$

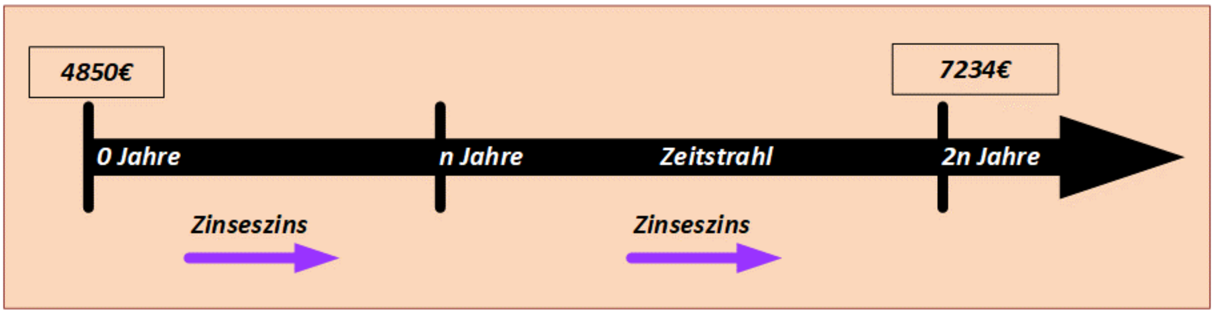
$$x = \frac{22353{,}19\,€ - \;27073{,}56\,€}{-1{,}008^6} = \frac{-4720.36}{-1{,}049} = \;4500$$

20 *Lösung,* Jahreszinsen Zeitstrahl

Mein Kontostand beläuft sich auf 4850€. Bei einem Zinssatz von 0,8%. Nach ein paar Jahren überweise ich nochmals 2000€, bei gleichbleibendem Zinssatze. Nach nochmals <u>gleich vielen Jahren</u> ist mein Kontostand auf 7234€ angewachsen. Wie lange war mein Geld auf meinem Konto?

$$Kn = Ko * (\;1 + \frac{p}{100})^n \rightarrow q = \;1 + \frac{p}{100} \rightarrow Kn = Ko * q^n$$

$$q = \;1 + \frac{0{,}8}{100} = 1{,}008$$



$$\left(4850\,€ * \;1{,}008^n + 2000\,€\right) * \;1{,}008^n = 7234\,€$$ **/() ausmultiplizieren**

$$4850\,€ * \;1{,}008^{2n} + 2000 * \;1{,}008^n = 7234\,€$$

$$4850\,€ * \;\left(1{,}008^n\right)^2 + 2000 * \;1{,}008^n - 7234\,€ = 0$$

$$4850\,€ * \;x^2 + 2000\,x - 7234\,€ = 0$$

$$4850\,x^2 + 2000\,x - 7234 = 0$$

$$x^2 + \frac{2000}{4850}x - \;\frac{7234}{4850} = 0$$

$x = \;1{,}008^n$ ← **Substitution (auswechseln). Wir erhalten eine quadratische Gleichung!**

$$x1\,;x2 = \;-\frac{p}{2} \mp \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - \;p}$$ / PQ-Formel, Quadratische Gleichung

$$x1\,;x2 = \;-\frac{0{,}412}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{0{,}412}{2}\right)^2 - (-1{,}49)}$$ **= 1,032 & -~~1,44~~**

$1{,}032 = 1{,}008^n$

$\log_{1,008} 1{,}032 = n = 4 \ \ Jahre$

2 1 *Lösung Mischen*

Zwei Kaffeesorten werden gemischt. Sorte A kostet 11€ pro Kilo und man nimmt davon 40 Kilo. Es entsteht eine Mischung von 50 Kilo Kaffee mit einem Preis von 12€ pro Kilo. Wie viel kostet Sorte B?

Was wissen wir (schwarz):

Sorte	Menge	Preis	Produkt
A	40kg	11€	440
B	10kg	x	10 * x
Mischung	50kg	12€	600

Ergänzungen (blau). Gleichung (rot).

Die Gleichung:

$440 + 10x = 600 \quad /-440$

$10x = 600 - 440 = 160 \quad / :10$

$x = \frac{160}{10} = 16$ **Sorte B: 16€**

2 2 *Lösung,* Binomische Formel

Für Leute, die sich wochenlang mit binomischen Formeln beschäftigen ist diese Aufgabe nicht schwierig. Sie erkennen auch, dass die Ziffer 43 eine Primzahl ist! Jedoch wer sich nur gelegentlich damit beschäftigt, für diejenigen ist diese Gleichung schon schwierig.

$a^2 - b^2 = 43$ → ***43 ist eine Primzahl***

$(a+b)*(a-b) = 43$

$a + b = 43$ ❶

$a - b = 01$ ❷

❶ und ❷ = Addition

$2a = 44$

$a = \frac{44}{2} = 22$

$22 + b = 43$

$b = 43 - 22 = 21$

Probe:

$22^2 - 21^2 = 43$

$(22+21)*(22-21) = 43$

Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl (größer als 1), die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist, also genau zwei Teiler hat. Zahlen wie 2, 3, 5, 7, 11 sind Primzahlen, während Zahlen wie 4 (teilbar durch 1, 2, 4) oder 6 (teilbar durch 1, 2, 3, 6) zusammengesetzte Zahlen sind. Die 1 ist per Definition keine Primzahl.

Januar 2026, Hans Busche