kgV

Ein Vielfaches einer Zahl ist das Ergebnis, wenn man diese Zahl mit einer anderen ganzen Zahl malnimmt. Es entspricht dem 1-fachen, 2-fachen, 3-fachen oder jedem weiteren Vielfachen dieser Zahl. Kurz gesagt: Alle Zahlen, die im kleinen Einmaleins vorkommen und darüber hinaus.
Beispiel: Die Vielfachen von 6 sind: $\boldsymbol{V_6} = \{\mathbf{6};\ \mathbf{12};\ \mathbf{18};\ \mathbf{24};\ \ldots\}$

Gemeinsames Vielfaches ist eine Zahl, die ohne Rest durch zwei oder mehrere vorgegebene Zahlen teilbar ist.
Beispiel:
Vielfaches von 4 → $\boldsymbol{V_4} = \{\mathbf{4}; \mathbf{8}; \mathbf{12}; \mathbf{16}; \mathbf{20}; \mathbf{24}; \mathbf{28}; \mathbf{32}; \mathbf{36} \ldots\ldots\}$
Vielfaches von 6 → $\boldsymbol{V_6} = \{\mathbf{6}; \mathbf{12}; \mathbf{18}; \mathbf{24}; \mathbf{30}; \mathbf{36} \ldots\ldots\}$
Die Zahlen 12, 24 und 36 sind gemeinsame Vielfache von 4 und 6, da sie in beiden Reihen vorkommen.

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) ist die Zahl 12, obiges Beispiel, da sie in beiden Reihen vorkommt und das kleinste Vielfache ist. $\boldsymbol{kgV}(\mathbf{4}, \mathbf{6}) = \mathbf{12}$.

Wofür braucht man das? Um Brüche zusammenzurechnen, müssen sie denselben Nenner (die gleiche Zahl unten) haben. Das kgV hilft dabei, den Hauptnenner zu bestimmen. Es ist die kleinstmögliche Zahl, auf die man die verschiedenen Nenner erweitern kann. Periodische Vorgänge synchronisieren: Wenn zwei blinkende Lichter in unterschiedlichen Abständen aufleuchten, kann man mit dem kgV berechnen, wann sie das nächste Mal exakt gleichzeitig blinken. Verpackungseinheiten: Wenn man Gegenstände in unterschiedlichen Packungsgrößen kaufen muss (z. B. Hotdogs in 8er-Packungen und Würstchen in 5er-Packungen), hilft das kgV dabei herauszufinden, wie viele Packungen man kaufen muss, damit am Ende nichts übrigbleibt (in diesem Fall: 40 Stück).

ggT

Ein Teiler ist eine ganze Zahl, durch die man eine andere Zahl ohne Rest teilen kann. Das Ergebnis der Teilung muss ebenfalls eine ganze Zahl sein. Wenn du 12 Gummibärchen gerecht aufteilen möchten, kannst du das tun, ohne eins zerschneiden zu müssen. Du kannst die 12 Gummibärchen an 1, 2, 3, 4, 6 oder 12 Kinder verteilen. Die 1 ist immer ein Teiler jeder Zahl. Jede Zahl ist immer auch ein Teiler von sich selbst.

Ein gemeinsamer Teiler ist eine Zahl, durch die zwei oder mehr andere Zahlen ohne Rest geteilt werden können. Er teilt sozusagen beide Zahlen "gleichzeitig". Die Teiler von 12 sind: 1, 2, 3, 4, 6 und 12. Die Teiler von 18 sind: 1, 2, 3, 6, 9 und 18. Wenn wir schauen, welche Zahlen in beiden Listen vorkommen, sind die gemeinsamen Teiler: 1, 2, 3 und 6.

Größter gemeinsamer Teiler ist die ***größte*** Zahl, durch die sich zwei oder mehrere Zahlen ohne Rest teilen lassen. Teiler der 12: Welche Zahlen teilen die 12 ohne Rest? Das sind: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Teiler der 18: Welche Zahlen teilen die 18 ohne Rest? Das sind: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Gemeinsame Teiler: Welche Zahlen tauchen in beiden Listen auf? Das sind: 1, 2, 3 und 6. Der größte gemeinsame Teiler: Die größte dieser Zahlen ist die 6. $ggT(12, 18) = 6$.

Wofür braucht man das? Wenn du Zähler und Nenner eines Bruchs durch ihren ggT teilst, ist der Bruch sofort vollständig gekürzt. Ein Beispiel: $\frac{6}{12}$ lässt sich mit dem ggT(6) direkt zu $\frac{1}{2}$ kürzen.

App

Die kgV-Implementation mit der Programmiersprache JavaScript sieht man im nachfolgenden Bild. Ich versuche die beiden Funktionen zu beschreiben.

```
18  //**************************************************************************
19  // Größte gemeinsame Teiler von zwei Zahlen
20  //**************************************************************************
21  function ggT(a, b){
22    a = Math.abs(a);
23    b = Math.abs(b);
24    while (b !== 0){
25      let temp = b;
26      b = a % b;
27      a = temp;
28    }
29    return a;
30  }
31
32  //**************************************************************************
33  // Kleinstes gemeinsames Vielfaches
34  //**************************************************************************
35  function kgV(a, b){
36    if (a === 0 || b === 0) return 0;
37    return Math.abs(a * b) / ggT(a, b);
38  }
```

Beispiel: console.log(kgV(12, 18)); // Ausgabe: 36
Das wichtigste zuerst: Die Funktion kgV() , in Zeile 35 bis 37, nutzt die Funktion ggT() in Zeile 21 bis 30. Die beiden Funktionen berechnen: Den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier Zahlen, Zeile 21 bis 30 und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier Zahlen, Zeile 35 bis 38. Die Funktion ggT() muss existieren, damit kgV() funktioniert. Zeile 22 und 23: Negative Zahlen werden positiv gemacht. Damit funktioniert die Berechnung auch mit negativen Zahlen. Zeile 24 bis 28, die Schleife „while (b !== 0)" läuft so lange, bis b gleich 0 ist. Hier wird der euklidische Algorithmus verwendet. Der euklidische Algorithmus nutzt: „gcd(a,b)=gcd(b,a modulo b)". Das bedeutet: Der ggT zweier Zahlen bleibt gleich, wenn man: die erste Zahl durch die zweite ersetzt und die zweite durch den Rest der Division. Im Detail: Zeile 25 →Der aktuelle Wert von „b" wird gespeichert. Zeile 26 → Modulo, Rest einer Division. Zeile 27: Der alte Wert von „b" wird zu a. Beispielablauf ggT(18, 12):

Schritt	a	b
Start	18	12
1	12	6
2	6	0

Funktion kgV(a, b)! Dies Funktion berechnet das kleinste gemeinsame Vielfache. Zeile 36: Wenn eine Zahl 0 ist, wird 0 zurückgegeben. Denn mit 0 gibt es kein sinnvolles gemeinsames Vielfaches. Zeile 37: Math.abs(a * b) / ggT(a, b) ist äquivalent zu der mathematischen Beziehung kgV(a, b) = $\frac{|a*b|}{ggT(a,b)}$ **Beispiel kgV(12, 18):**
Schritt 1: a * b = 216 ; Schritt 2: ggT(12, 18) = 6 ; Schritt 3: 216 / 6 = 36 ; Resultat kgV(12, 18) = 36. Es hilft nichts! Manchmal muss man sich die Zeit gönnen und mit ein Paar Seiten Schmierpapier den gesamten Ablauf durchackern!

Mit den nachfolgenden Textaufgaben kann man die HTML-CSS-JavaScript-Applikation prüfen:

- Ein Microcontroller soll zwei unterschiedliche Aufgaben über Timer-Interrupts ausführen. Task A wird alle 12 Millisekunden aufgerufen, Task B alle 16 Millisekunden. Das System startet synchron zum Zeitpunkt t = 0 ms. Wie groß ist das Zeitintervall (in Millisekunden), nach dem beide Tasks exakt im selben Zyklus aufgerufen werden? Antwort: Beide Tasks treffen sich alle 48 Millisekunden in ihrem Aufruf.

- Zwei Kontrolllampen in einer Schaltanlage blinken in unterschiedlichen Intervallen. Lampe 1 leuchtet alle 6 Sekunden kurz auf, Lampe 2 leuchtet alle 9 Sekunden auf. Zum Zeitpunkt t = 0 s blinken beide Lampen das erste Mal gleichzeitig. Nach wie vielen Sekunden blinken beide Lampen wieder exakt zum gleichen Zeitpunkt auf? Antwort: Die Lampen blinken alle 18 Sekunden wieder synchron.

- Zwei Holzstäbe der Längen 60cm und 42cm sollen in gleich lange Stücke zersägt werden. Wie lang können die Stücke höchstens werden? Antwort: 6cm.

- Aus zwei Wasserhähnen tropft es in bestimmten Abständen. Aus dem Warmwasserhahn alle 24s, aus dem Kaltwasserhahn alle 18s. Nach wie vielen Sekunden tropfen sie gleichzeitig? Antwort: 72 Sekunden.

- Der Fußboden eines Raumes ist 100cm lang und 140cm breit. Man möchte ihn mit möglichst großen quadratischen Fliesen belegen. Welche Kantenlänge ist dabei zu wählen? Antwort: 20cm.

- Zwei Radfahrer fahren auf einer Rennbahn. Der eine fährt eine Runde in 28s, der andere in 35s. Sie fahren gleichzeitig ab und fahren so lange, bis sie wieder gleichzeitig über die Startlinie fahren. Nach welcher Zeit geschieht dies? Antwort: 140 Sekunden.

Hans Busche, Mai 2026