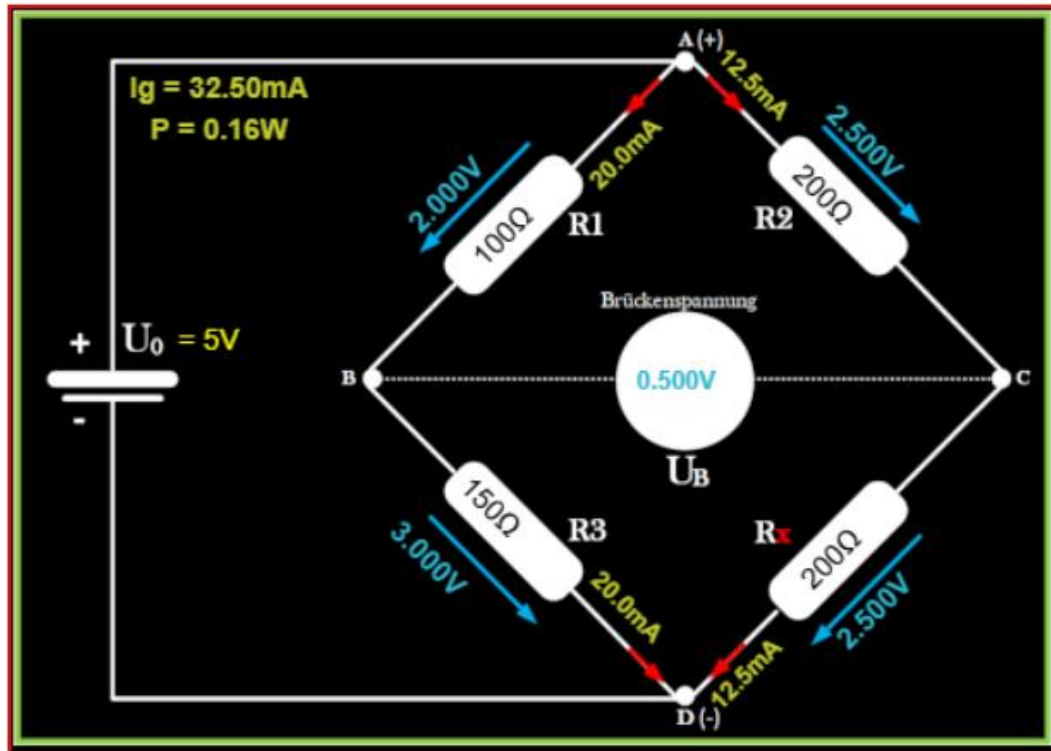


## Wheatstone Messbrücke.



Ich möchte dir die Grundlagen der Wheatstone-Brückenschaltung vorstellen. Diese Schaltung ist ein wichtiges Messverfahren in der Elektrotechnik und wird verwendet, um elektrische Widerstände sehr genau zu bestimmen. Besonders in der Messtechnik und in verschiedenen Sensorsystemen spielt die Wheatstone-Brücke eine große Rolle. Die Schaltung besteht aus vier Widerständen, die in Form einer Brücke angeordnet sind. Drei Widerstände sind bekannt, während der vierte Widerstand ( $R_x$ ) unbekannt ist oder als Sensor dient. Zwischen zwei Punkten in der Mitte der Schaltung wird eine Messspannung gemessen. Dieses Messgerät ist ein Galvanometer. Der Zeiger steht in der Mitte und zeigt somit negative Spannung (Linksausschlag) und positive Spannung (Rechtsaus Schlag) an. Das Ziel der Wheatstone-Brücke ist es, ein sogenanntes Brückengleichgewicht zu erreichen. In diesem Zustand fließt kein Strom durch das Messgerät, weil die Spannungen auf beiden Seiten gleich sind. Wenn dieses Gleichgewicht erreicht ist, kann der unbekannte Widerstand mit Hilfe eines Verhältnisses der anderen Widerstände berechnet werden. Die Messung ist von der Versorgungsspannung  $U_0$  unabhängig. Das macht die Messung sehr genau und von Spannungsschwankungen unabhängig. Deshalb wird sie häufig in der Praxis eingesetzt, zum Beispiel in Waagen, Drucksensoren, Temperaturfühlern oder Dehnungsmessstreifen zur Kraftmessung. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Wheatstone-Brückenschaltung ein wichtiges Messverfahren ist, das in vielen technischen Bereichen verwendet wird, um präzise Messungen durchzuführen.

Das obige Bild zeigt eine **nicht** abgeglichenen Brückenschaltung. Wir wollen nun abtauchen in das Ohm'sche Gesetz und die Schaltung berechnen. Wenn wir den obigen Zustand

mathematisch Aufgedröselst haben, wollen wir auch den Wert des Widerstandes  $R_x$  bestimmen, der für einen Abgleich der Messbrücke notwendig ist.

Gegeben:

$$R_1 = 100\Omega ; R_2 = 200\Omega ; R_3 = 150\Omega ; R_x = 200\Omega ; U_0 = 5V ; U_B = 0,5V$$

Berechnung der Brückenspannung  $U_{BC}$ , nicht abgegliche Messbrücke:

$$U_{BC} = U_0 * \left( \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_x}{R_2 + R_x} \right) = 5V * \left( \frac{150\Omega}{100\Omega + 150\Omega} - \frac{200\Omega}{200\Omega + 200\Omega} \right) = 0,5V$$

Berechnung der  $I_{ABD}$  ;  $I_{ACD}$  ;  $I_{ges}$  Ströme. Achtung! Das Galvanometer verbraucht auch Strom! Berücksichtigen wir jedoch nicht. Eingangswiderstand Galvanometer =  $\infty$

$$I_{ABD} = \frac{U_0}{R_1 + R_3} = \frac{5V}{100\Omega + 150\Omega} = 20mA$$

$$I_{ACD} = \frac{U_0}{R_2 + R_x} = \frac{5V}{200\Omega + 200\Omega} = 12,5mA$$

$$I_{ges} = I_{ABD} + I_{ACD} = 20mA + 12,5mA = 32,5mA$$

Berechnung der  $U_{AB}$  ;  $U_{BD}$  ;  $U_{AC}$  ;  $U_{CD}$  Spannung:

$$U_{AB} = I_{ABD} * R_1 = 20mA * 100\Omega = 2V$$

$$U_{BD} = I_{ABD} * R_3 = 20mA * 150\Omega = 3V$$

$$U_{AC} = I_{ACD} * R_2 = 12,5mA * 200\Omega = 2,5V$$

$$U_{CD} = I_{ACD} * R_x = 12,5mA * 200\Omega = 2,5V$$

Berechnung der Leistung:

$$P_{zu} = U_0 * I_{ges} = 5V * 32,5mA = 0,165W$$

Abgleichbedingungen für  $U_{BC} = 0$  (Galvanometer zeigt Null) :

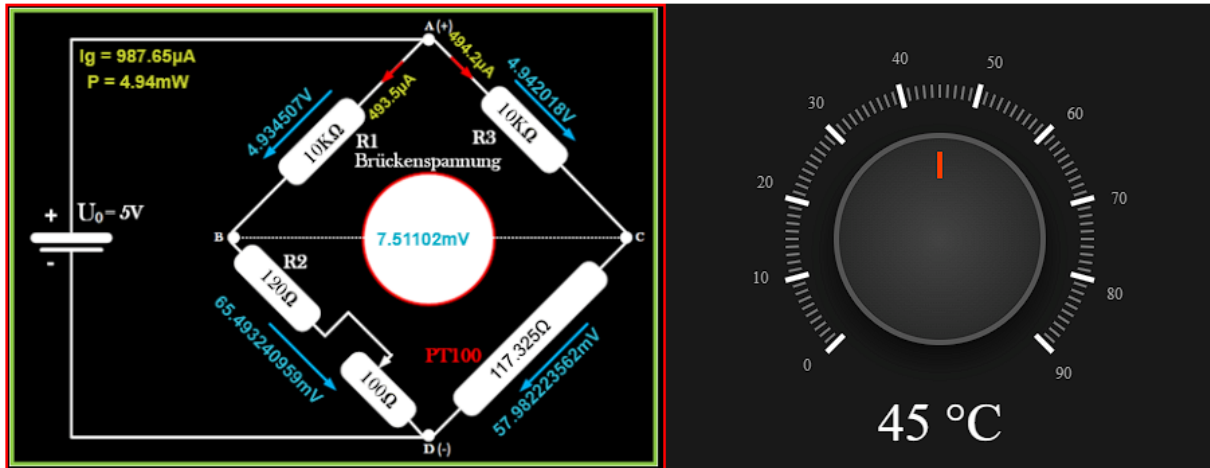
$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x} \rightarrow R_x = \frac{R_2 * R_3}{R_1} = \frac{200\Omega * 150\Omega}{100\Omega} = 300\Omega$$

Kernbotschaft der Formel für den Brückenabgleich: Unabhängig von  $U_0$

Einige Details zur HTML, CSS JavaScript Applikation: Alle User-Eingaben sind mit einem Pfeil „hoch/runter“ ausgestattet. Ein typisches Merkmal für „Input-Number-HTML-Tag“. Durch Anklicken der Pfeile mit der Maus erfolgt sofort eine Neuberechnung der Schaltung.

## PT100 & Wheatstone Messbrücke.

Wie dimensioniert man eine Wheatstone Messbrücke mit PT100? Bedingungen: Messstrom (PT100) kleiner 1mA, wegen der Temperaturdrift innerhalb des Sensors. Die Brückenspannung von Null Volt soll im Temperaturbereich von 0° Celsius und 90° vorhanden sein. Die Gleichspannungsversorgung beträgt 5 Volt.



**Achtung!** Im Gegensatz zum Bild weiter oben habe ich die Bezeichnungen für die Widerstände (R1, R2, R3 und Rx / R<sub>PT100</sub>) geändert. Dadurch ändern sich auch die Verhältnisse in den Formeln. Das habe ich absichtlich getan!

Der PT100-Temperaturfühler hat bei 0° Celsius einen Widerstand von 100Ω. Im Durchschnitt ändert sich der Widerstand um ca. 0,385Ω pro Grad Celsius. Ein Zahlenbeispiel: -200°C entspricht ca. 18,52Ω und 200°C ca. 175,83Ω.

Ein PT100 ist primär ein temperaturabhängiger Widerstand. Um diesen jedoch elektronisch auszuwerten wird die Widerstandsänderung fast immer in eine Spannungsänderung umgewandelt. Die Wheatstone Brückenschaltung eignet sich dafür hervorragend. Das nachfolgende Bild zeigt so einen Aufbau. Oft wird das Galvanometer (Brückenspannung) gegen einen Operationsverstärker ausgetauscht, welcher die entstandene Spannungsdifferenz vergleicht und verstärkt. Ein ideales Bauteil ist der INA128, ein präziser, energieeffizienter Instrumentenverstärker von Texas Instruments. Siehe auch das Bastelprojekt: [https://apisur.neocities.org/pages8/PT100\\_Basis](https://apisur.neocities.org/pages8/PT100_Basis)

Auch hier wollen wir die obige Schaltung berechnen. Wie hoch ist die Temperatur, wenn die Brückenspannung Null Volt beträgt und der Widerstand R3 mittels Spindelpotentiometer auf 132,725Ω eingestellt ist? Gegeben: R1 = 10kΩ; R2 = 10kΩ; R3 = 132,725Ω; **Temperatur 45°C**; U<sub>0</sub> = 5V.

Minimaler Widerstand für < 1 mA:

$$R > \frac{U_0}{I} = \frac{5V}{0,001A} = 5k\Omega$$

Das bedeutet: ☞ Alle Widerstände sollten im kΩ-Bereich liegen, sonst wird der Strom zu groß.

PT100 in Abhängigkeit der Temperatur, hier 45°C:

$$R_{45^\circ\text{C}} = R_{PT100} * (1 + \alpha * T) = 100\Omega (1 + 0,00385 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} * 45^\circ\text{C} = 117,325\Omega$$

Probe:  $0,385 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} * 45^\circ\text{C} + 100\Omega = 117,325\Omega$

Berechnung der Brückenspannung  $U_{BC}$ :

$$U_{BC} = U_0 * \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_{PT100}}{R_3 + R_{PT100}} \right) = 5V * \left( \frac{132,725\Omega}{10k\Omega + 132,725\Omega} - \frac{117,325\Omega}{10k\Omega + 117,325\Omega} \right) = 7,511mV$$

Berechnung der  $I_{ABD}$ ;  $I_{ACD}$ ;  $I_{ges}$  Ströme:

$$I_{ABD} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{5V}{10k\Omega + 132,725\Omega} = 493,45\mu A$$

$$I_{ACD} = \frac{U_0}{R_3 + R_x} = \frac{5V}{10k\Omega + 117,325\Omega} = 494,20\mu A$$

$$I_{ges} = I_{ABD} + I_{ACD} = 493,45\mu A + 494,20\mu A = 0,98mA$$

Berechnung der  $U_{AB}$ ;  $U_{BD}$ ;  $U_{AC}$ ;  $U_{CD}$  Spannung:

$$U_{AB} = I_{ABD} * R_1 = 493,45\mu A * 10k\Omega = 4,93V$$

$$U_{BD} = I_{ABD} * R_2 = 493,45\mu A * 132,725\Omega = 65,5mV$$

$$U_{AC} = I_{ACD} * R_3 = 494,2\mu A * 10k\Omega = 4,94V$$

$$U_{CD} = I_{ACD} * R_x = 494,2\mu A * 117,325\Omega = 57,9mV$$

Berechnung der Leistung:

$$P_{zu} = U_0 * I_{ges} = 5V * 0,98mA = 4,9mW$$

Abgleichbedingungen für  $U_{BC} = 0$  (Galvanometer zeigt Null):

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x} \rightarrow R_x = \frac{R_1 * R_2}{R_3} = \frac{10k\Omega * 132,725\Omega}{10k\Omega} = 132,725\Omega$$

Wenn bei 132,725Ω die Brückenspannung 0 Volt ist, dann berechnet sich die Temperatur wie folgt:

$$T_{pt132,725} = \frac{132,725\Omega - 100\Omega}{0,385 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = 85^\circ\text{C}$$

Die Empfindlichkeit der PT100 - Wheatstone Messbrücke. Die Empfindlichkeit (auch Sensitivität genannt) gibt an, um wie viele Millivolt sich die Brückenspannung  $U_{BC}$  pro Grad Celsius Temperaturänderung verändert. Der PT100 hat einen linearen Temperaturkoeffizienten von  $\alpha = 0,003851 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}$ . Die Änderung des Widerstands pro

Kelvin/Celsius beträgt:  $\Delta R \approx R_{PT100} * \alpha = 100\Omega * 0,00351 \approx 0,3851 \frac{\Omega}{^\circ C}$ . Die Spannung an der Brücke ist (unter Vernachlässigung des festen Zweiges R1 & R2, da dieser konstant bleibt):

$$U_{BC}(R_{PT100}) = U_0 \left( \frac{R_{PT100}}{R3 + R_{PT100}} - \text{Konstante} \right)$$

Um die Empfindlichkeit  $E = \frac{\Delta U_{BC}}{\Delta R_{PT}}$  zu finden, nutzen wir die Kettenregel:  $\frac{\Delta U_{BC}}{\Delta R_{PT}} = \frac{\Delta U_{BC}}{\Delta R_{PT}} * \frac{\Delta R_{PT}}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta U_{BC}}{\Delta R_{PT}} = U_0 * \frac{R3}{(R3 + R_{PT})^2} = 5V * \frac{10k\Omega}{(10k\Omega + 132,725\Omega)^2} = 486,99\mu V/\Omega$$

Die Empfindlichkeit  $E = 487 \frac{\mu V}{\Omega} * 0,3851 \frac{\Omega}{^\circ C} = 0,187 \frac{mV}{^\circ C}$ .

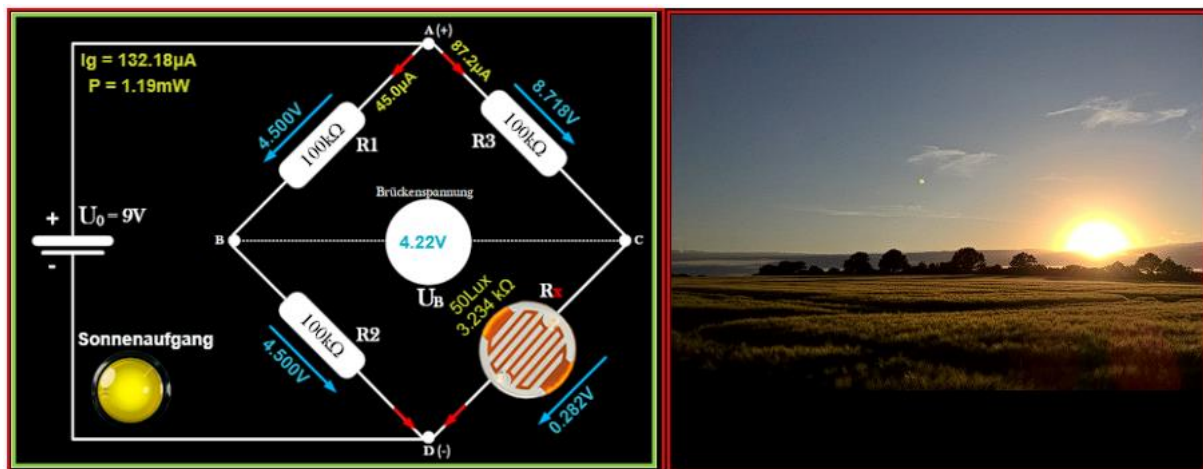
Das ist ein sehr kleiner Wert. Um eine Auflösung von 0,1°C zu erreichen, müsste dein Messgerät (oder der Analog-Digital-Wandler) Änderungen von etwa 19µV sicher erkennen können. Deshalb ist die Verwendung eines Verstärkers bei dieser hochohmigen Dimensionierung unumgänglich.

Ab 85°C aufwärts, in unserem Beispiel bis maximal 90°, wechselt die Polarität der Brückenspannung. Das macht die Auswertung mittels INA128 schwieriger. Es besteht keinen Anlass innerhalb eines Messbereiches einen Brückenabgleich zu erzielen. Weiterhin sind immer Widerstände hoher Güte, Toleranzbereich unter 1% erforderlich. Braucht man PT100 für den eigenen Bedarf, favorisiere ich das Beispiel hier:

[https://apisur.neocities.org/pages8/PT100\\_Basis](https://apisur.neocities.org/pages8/PT100_Basis)

### LDR & Wheatstone Messbrücke.

Diese Applikation simuliert einen Fotowiderstand LDR (Light Dependent Resistor) zusammen mit einer Wheatstone Messbrücke. Es ist eine Animation. Mit Betätigung des Start-Buttons werden fünf Bilder hintereinander visualisiert, die einen Tagesablauf repräsentierten.



Jedes Bild ist mit einer Beleuchtungsstärke in LUX ausgestattet. Die Beleuchtungsstärke in LUX beeinflusst den Fotowiderstand wie folgt: Lux ↑ entspricht Widerstand ↓ ; Lux ↓

entspricht Widerstand  $\uparrow$ . Zur Berechnung verwenden wir ein Modell. Ein Fotowiderstand besteht aus einem Halbleitermaterial. Wenn Licht auf den Sensor fällt:

- Photonen treffen auf das Material
- Elektronen werden freigesetzt
- Mehr Ladungsträger entstehen
- Strom kann besser fließen
- Widerstand sinkt

Formel:  $R = A * Lux^{-B}$  - R = Widerstand des Fotowiderstands, Einheit  $\Omega$ ; Lux = Beleuchtungsstärke, Einheit LUX; A = Materialkonstante des Sensors, Einheit  $\Omega$  (50000 mein LDR); B = Kennlinienexponent (0,7 mein LDR).

50 LUX entspricht:  $R = A * Lux^{-B} = 50000 * 50^{-7} = 3,234k\Omega$

Typische reale Werte eines LDR:

Licht	Lux	Widerstand
Dunkelheit	0.1 – 1	100k $\Omega$ – 1M $\Omega$
Dämmerung	10 – 100	10k $\Omega$ – 50k $\Omega$
Sonne	10000	200 $\Omega$ – 1k $\Omega$

Berechnung der  $I_{ABD}$ ;  $I_{ACD}$ ;  $I_{ges}$  Ströme. Achtung! Das Galvanometer verbraucht auch Strom! Berücksichtigen wir jedoch nicht. Eingangswiderstand Galvanometer =  $\infty$

Gegeben:  $R_1 = 100k\Omega$ ;  $R_2 = 100k\Omega$ ;  $R_3 = 100k\Omega$ ;  $R_x = 3,234k\Omega$  entspricht 50lux;  $U_0 = 9V$

Berechnung der  $I_{ABD}$ ;  $I_{ACD}$ ;  $I_{ges}$  Ströme:

$$I_{ABD} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{9V}{100k\Omega + 100k\Omega} = 45\mu A$$

$$I_{ACD} = \frac{U_0}{R_3 + R_x} = \frac{9V}{100k\Omega + 3,234k\Omega} = 87,2\mu A$$

$$I_{ges} = I_{ABD} + I_{ACD} = 45\mu A + 87,2\mu A = 132,18\mu A$$

Berechnung der  $U_{AB}$ ;  $U_{BD}$ ;  $U_{AC}$ ;  $U_{CD}$  Spannung:

$$U_{AB} = I_{ABD} * R_1 = 45\mu A * 100k\Omega = 4,5V$$

$$U_{BD} = I_{ABD} * R_2 = 45\mu A * 100k\Omega = 4,5V$$

$$U_{AC} = I_{ACD} * R_3 = 132,18\mu A * 100k\Omega = 8,718V$$

$$U_{CD} = I_{ACD} * R_x = 132,18\mu A * 3,234k\Omega = 0,282V$$

Berechnung der Leistung:

$$P_{zu} = U_0 * I_{ges} = 9V * 132,18\mu A = 1,2mW$$

Berechnung der Brückenspannung  $U_{BC}$ :

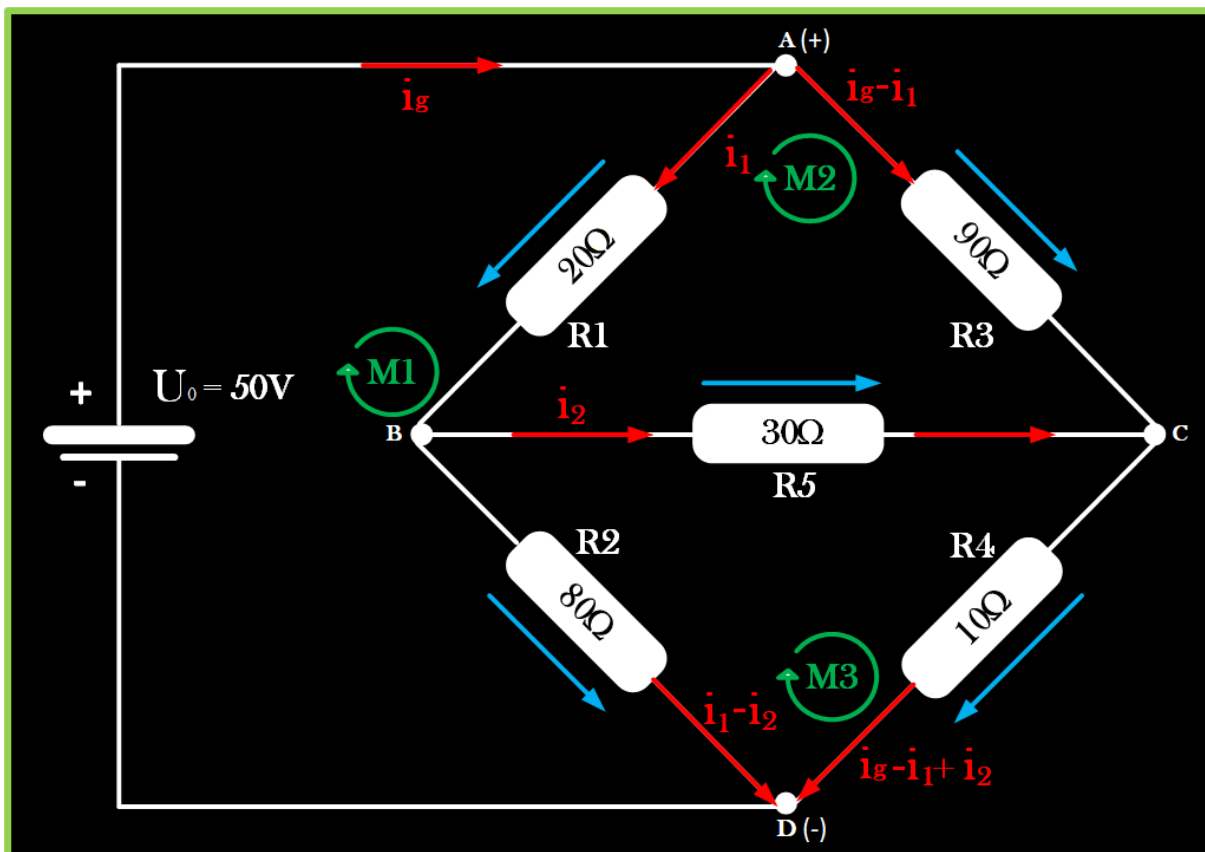
$$U_{BC} = U_0 * \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_x}{R_3 + R_x} \right) = 9V * \left( \frac{100k\Omega}{100k\Omega + 100k\Omega} - \frac{3,23k\Omega}{100k\Omega + 3,23k\Omega} \right) = 4,22V$$

Keine Frage! Verbindet man einen LDR mit einem Transistor. Realisiert mit ein paar Widerständen für den Arbeitspunkt, dann hat man für „ein paar Euro fuffzig“ eine funktionierende Schaltung. Oder schau dir dieses Projekt an:

[https://apisur.neocities.org/pages4/LDR\\_Laser\\_Shooting\\_Game](https://apisur.neocities.org/pages4/LDR_Laser_Shooting_Game)

Grundsätzlich haben wir den Spannungsabfall am Galvanometer immer vernachlässigt. Zum Schluss dieser Beschreibung spendieren wir im Brückenweig B/C einen Widerstand. Das hat erhebliche Konsequenzen. Wir verlassen damit die Wheatstone-Brückenschaltung und erhalten ein Widerstandsnetzwerk. Zum Ohm'schen Gesetz kommen die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel hinzu. Das ist keine leichte Kost. Hier können schnell Fehler passieren. Bitte verzeih mir.

### Widerstandsnetzwerk mit Knoten und Maschen



#### Der Strom → Knotenregel

Der Gesamtstrom  $i_g$  teilt sich im Knoten A auf, in zwei Teilströme:  $i_1$  und  $i_g - i_1$ . Die Richtlinie für Knoten A ist gegeben, Gesamtstrom rein, zwei Teilströme raus. Der Strom  $i_1$  fließt durch R1 und teilt sich im Knoten B auf in  $i_2$  (zum Widerstand R5) und  $i_1 - i_2$  (zum Widerstand R2) auf. Richtlinie Knoten B:  $i_1$  rein  $i_2$  raus und  $(i_1 - i_2)$  raus. Die linke Seite des obigen Bildes haben wir erledigt. Wir beginnen erneut im Knoten A und behandeln die rechte Seite. Der Teilstrom  $(i_g - i_1)$  fließt über den Widerstand R3 in den Knoten C. Der Knoten C erhält auch den Strom, der von R5 kommt  $i_2$ . Zum Knoten D

fließt dann folgender Strom über den Widerstand R4:  $(i_g - i_1) + i_2$ . Vom Knoten D fließt der Strom zurück zur Quelle  $U_0 = 50V$ .

Die Knotenregel besagt, was reinfließt muss auch wieder rausfließen! Der Knoten ist kein Speicher. Wie das T-Stück bei der Wasserleitung. Fassen wir nochmals zusammen, eine letzte Kontrolle:

$$i_g \rightarrow [\text{Knoten A}] \rightarrow i_1 \rightarrow (i_g - i_1) \\ (i_1 - i_2) \rightarrow (i_g - i_1) + i_2 \rightarrow [\text{Knoten D}] \rightarrow i_g$$

### Die Spannung → Maschenregel

Die Maschenregel besagt, dass in einem geschlossenen Stromkreis (Masche) die Summe aller Teilspannungen gleich Null ist. Wir haben drei Maschen. Das Ohm'sche Gesetz sagt  $U = I * R$  und so formulieren wir die Maschen.

**Masche M1, beteiligt sind R1 und R2 und U0:**

$$i_1 * R1 + (i_1 - i_2)R2 - U_0 = 0$$

**Masche M2, beteiligt sind R3 und R5 und R1:**

$$(i_g - i_1)R3 - i_2 * R5 - i_1 * R1 = 0$$

**Masche M3, beteiligt sind R5 und R4 und R2:**

$$i_2 * R5 + (i_g - i_1 + i_2)R4 - (i_1 - i_2)R1 = 0$$

Zahlen werden eingesetzt:

$$i_1 * 20 + (i_1 - i_2)80 - 50 = 0$$

$$(i_g - i_1)90 - i_2 * 30 - i_1 * 20 = 0$$

$$i_2 * 30 + (i_g - i_1 + i_2)10 - (i_1 - i_2)80 = 0$$

Wir suchen drei Ströme und haben drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Das sollte lösbar sein.

**Gleichung 1:**

$$i_1 * 20 + (i_1 - i_2)80 - 50 = 0$$

$$20 * i_1 + 80 * i_1 - 80 * i_2 = 50$$

$$100 * i_1 - 80 * i_2 = 50$$

$$10 * i_1 - 8 * i_2 = 5$$

**Gleichung 2:**

$$(i_g - i_1)90 - i_2 * 30 - i_1 * 20 = 0$$

$$90i_g - 90i_1 - 30i_2 - 20i_1 = 0$$

$$90i_g - 110i_1 - 30i_2 = 0$$

$$9i_g - 11i_1 - 3i_2 = 0$$

**Gleichung 3:**

$$i_2 * 30 + (i_g - i_1 + i_2)10 - (i_1 - i_2)80 = 0$$

$$30i_2 + 10i_g - 10i_1 + 10i_2 - 80i_1 - 80i_2 = 0$$

$$10i_g - 90i_1 + 120i_2 = 0$$

$$i_g - 9i_1 + 12i_2 = 0$$

**Zusammenfassung1:**

1.  $10 * i_1 - 8 * i_2 = 5$
2.  $9i_g - 11i_1 - 3i_2 = 0$
3.  $i_g - 9i_1 + 12i_2 = 0 \rightarrow i_g = 9i_1 - 12i_2$

**Einsetzen von 3 in 2:**

$$\begin{aligned}9(9i_1 - 12i_2) - 11i_1 - 3i_2 &= 0 \\81i_1 - 108i_2 - 11i_1 - 3i_2 &= 0 \\70i_1 - 108i_2 &= 0 \rightarrow i_1 = \frac{111}{70}i_2\end{aligned}$$

**Einsetzen von  $i_1$  in 1:**

$$\begin{aligned}10\left(\frac{111}{70}i_2\right) - 8i_2 &= 5 \\ \frac{111}{7}i_2 - \frac{56}{7}i_2 &= 5 \\ \frac{55}{7}i_2 &= 5 \\ i_2 = \frac{5 * 7}{55} = \frac{7}{11} &= \mathbf{0,636A}\end{aligned}$$

$i_1$  berechnen auf Basis  $i_2 = \frac{7}{11}$ :

$$\begin{aligned}10 * i_1 - 8 * i_2 &= 5 \\ 10 * i_1 - 8 \frac{7}{11} &= 5 \\ 10i_1 = 5 + \frac{56}{11} = \frac{55 + 56}{11} = \frac{111}{11} \\ i_1 = \frac{111}{110} &= \mathbf{1,009A}\end{aligned}$$

$i_g$  berechnen

$$\begin{aligned}i_g &= 9 \frac{111}{110} - 12 \frac{7}{11} \\ i_g = \frac{999}{110} - \frac{840}{110} = \frac{159}{110} &= \mathbf{1,445A}\end{aligned}$$

Wir haben jetzt den Gesamtstrom und die zwei Teilströme, alle Widerstände sind bekannt. Die nachfolgenden Rechenschritte ermitteln die weiteren verzweigten Ströme. Die Spannungen, die an den Widerständen abfällt, und die Leistung. Berechne mal die Schaltung ohne Widerstand R5 (das ist sehr einfach)! Vergleiche dann die Ströme und die Leistung. Ich, als Elektriker, sage dazu: Der „blöde“ Widerstand R5 bringt die Schaltung ganz schön durcheinander.

Strom:  $(i_g - i_1) = 1,445A - 1,009A = 0,436A$

Strom:  $(i_g - i_1) + i_2 = 0,436A + 0,636A = 1,072A$

Strom:  $(i_1 - i_2) = 1,009A - 0,636A = 0,373A$

Spannung am Widerstand R1:  $U_{R1} = R1 * i_1 = 20\Omega * 1,009A = 20,2V$

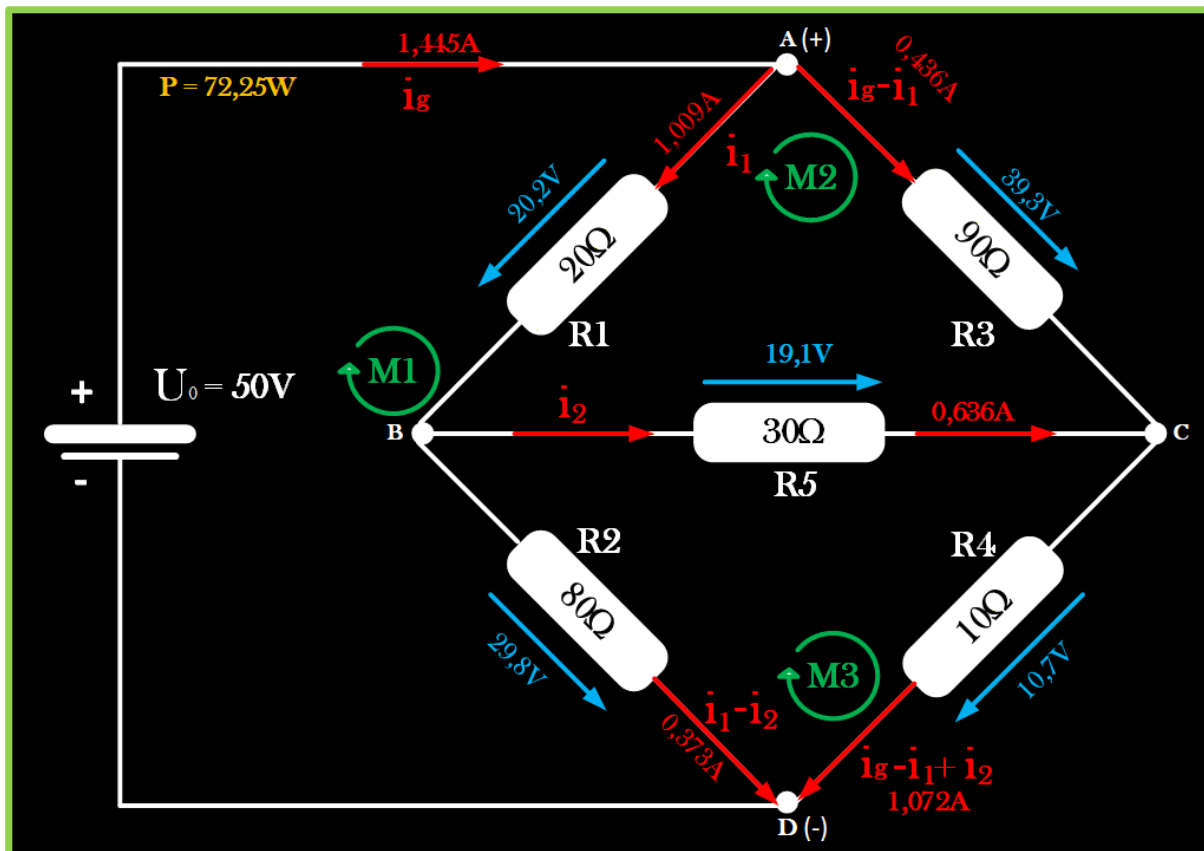
Spannung am Widerstand R2:  $U_{R2} = R2 * (i_1 - i_2) = 80\Omega * 0,373A = 29,8V$

Spannung am Widerstand R3:  $U_{R3} = R3 * (i_g - i_1) = 90\Omega * 0,436A = 39,2V$

Spannung am Widerstand R4:  $U_{R4} = R4 * (i_g - i_1) + i_2 = 10\Omega * 1,072A = 10,7V$

Spannung am Widerstand R5:  $U_{R5} = R5 * i_2 = 30\Omega * 0,636A = 19,1V$

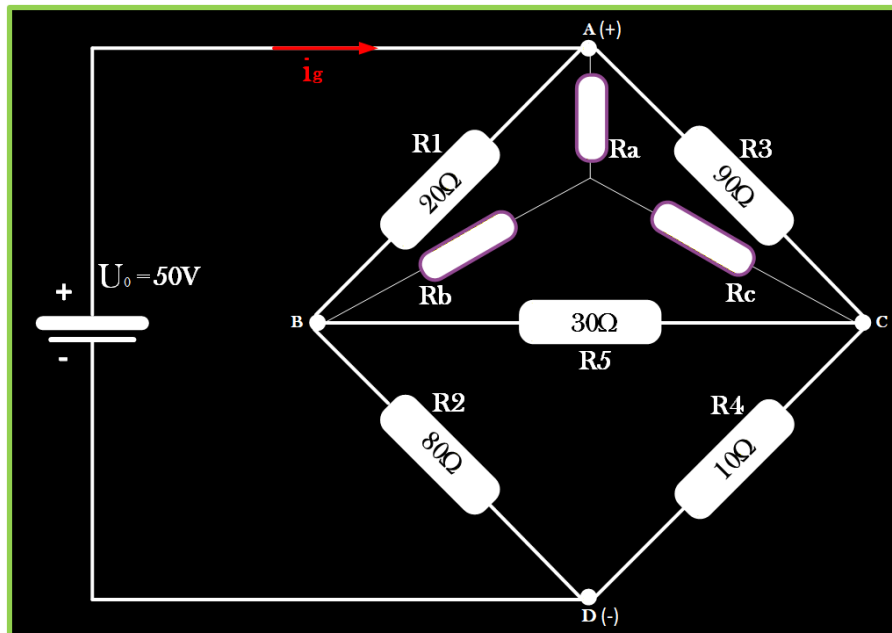
Das nachfolgende Bild zeigt die Lösung des Widerstandsnetzwerks an.



Nun haben wir eine Widerstandsbrücke berechnet. Knoten- und Maschenregel vertieft. Anhand dieser Regeln ein Gleichungssystem für die obige Schaltung geschaffen. Wenn wir die Werte der Widerstände ändern, erhalten wir sofort andere Verhältnisse. Strom- und Spannungsrichtungen ändern sich! Strom nimmt den Weg des Geringsten Widerstandes. Wir quälen uns erneut durch den Rechenweg! Ein Programm muss her, welches uns die Arbeit abnimmt.

### Widerstandsnetzwerk mit HTML, CSS & JavaScript

Für das Widerstandsnetzwerk gibt es auch eine HTML, CSS und JavaScript Applikation. Wir greifen beim Webformular in die Trickkiste. Die Lösung heißt Dreieck-Stern-Transformation. Anschließend erfolgt eine Zurückrechnung für die Ermittlung der Teilströme und Teilspannungen. Jede Spannung, jeden Strom müssen wir auf Vorzeichen analysieren, um die Spannungs- und Strompfeile zu bestimmen. Das ist nun wirklich die Krönung. Ich hoffe, dass ich es einigermaßen hinbekomme. Der Vorgang wird hier nicht bis ins kleinste Detail behandelt. Dafür gibt es ja die Google Chrome DevTool Einrichtung.



Die Dreieck-Verschaltung der Widerstände R1, R3 und R5 werden in eine Sternschaltung Ra, Rc und Rb umgewandelt. Ein Sternwiderstand berechnet sich mit dem Produkt der anliegenden Widerstände geteilt durch die Summe der Dreiecksschaltung:

$$R_a = \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{20\Omega * 90\Omega}{20\Omega + 90\Omega + 30\Omega} = 12,857\Omega$$

$$R_b = \frac{R_1 * R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{20\Omega * 30\Omega}{20\Omega + 90\Omega + 30\Omega} = 4,286\Omega$$

$$R_c = \frac{R_3 * R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{90\Omega * 30\Omega}{20\Omega + 90\Omega + 30\Omega} = 19,286\Omega$$

$$R_b + R_2 = R_{b2} = 4,286\Omega + 80\Omega = 84,286\Omega$$

$$R_c + R_4 = R_{c4} = 19,286\Omega + 10\Omega = 29,286\Omega$$

$$R_g = R_a + \frac{R_{b2} * R_{c4}}{R_{b2} + R_{c4}} = 12,857\Omega + \frac{84,286\Omega * 29,286\Omega}{84,286\Omega + 29,286\Omega} = 34,591\Omega$$

$$i_g = \frac{U_0}{R_g} = \frac{50V}{34,591\Omega} = 1,445A$$

„Notwendige Zwischenrechnung“

$$U_{1*} = i_g * R_a = 1,445A * 12,857\Omega = 18,584V$$

$$U_{2*} = U_0 - U_{1*} = 50V - 18,584V = 31,416V$$

$$i_2 = \frac{U_{2*}}{R_{b2}} = \frac{31,416V}{84,286\Omega} = 0,373A \rightarrow (i_1 - i_2) \text{ Beispiel oben}$$

$$i_4 = i_g - i_2 = 1,445A - 0,373A = 1,072A \rightarrow (i_g - i_1) + i_2 \text{ Beispiel oben}$$

$$U_2 = i_2 * R_2 = 0,373A * 80\Omega = 29,84V$$

$$U_4 = i_4 * R_4 = 1,072A * 10\Omega = 10,72V$$

$$U_5 = U_2 - U_4 = 29,85V - 10,72V = 19,13V$$

$$i_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{19,13V}{30\Omega} = 0,637A$$

$$\text{Maschenregel } [U_g - U_1 - U_2 = 0]$$

$$U_1 = U_g - U_2 = 50V - 29,84V = 20,16V$$

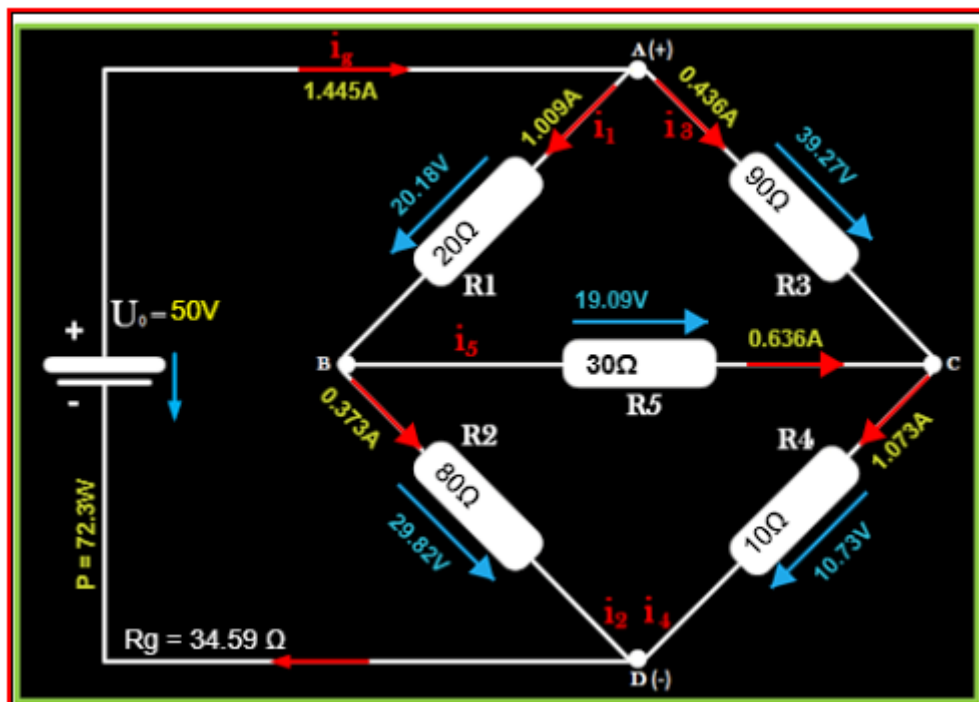
$$U_3 = U_g - U_4 = 50V - 10,72V = 39,28V$$

$$i_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{20,16V}{20\Omega} = 1,008A$$

$$i_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{39,28V}{90\Omega} = 0,436A$$

Abgesehen von ein Paar Rundungsfehler sind die Resultate beider Beispiele identisch. Das zweite Beispiel ist auch in JavaScript implementiert. Weiterhin richten sich die Strom- und Spannungspfeile nach den Vorzeichen der einzelnen physikalischen Größen.

Das nachfolgende Bild zeigt das Resultat der HTML-CSS-JavaScript-Applikation.



- Verändert man Widerstand R1 auf 720Ω, dann ist die Brücke abgeglichen. Spannung am Widerstand R5 ist dann Null Volt, und es fließt kein Strom. Verändert man die Versorgungsspannung U<sub>0</sub> ändert sich die Abgleichbedingungen nicht.
- Erhöht man den Widerstand R1 von 720Ω auf 720,1Ω dann ändert sich die Polarität für Spannung und Strom am Brückenwiderstand R5.

- **Verändert man Widerstand  $R_5$  an einer abgeglichenen Brücke (hervorgerufen durch Widerstand  $R_1$  ( $720\Omega$ )) so ändern sich die physikalischen Größen wie Strom, Spannung und „Ersatz“-Gesamtwiderstand nicht.**
- **Eine Brückenschaltung kann nicht mit Festwiderständen aufgebaut werden. Auch wenn die Toleranz der Widerstände kleiner als 1% ist. Man muss auf Potentiometer einsetzen, mit guter Qualität. Aus Sicht der Messtechnik gibt es keine großen Probleme, da ein Voltmeter einen sehr hohen Eingangswiderstand besitzt. Strommesser entsprechen mit sehr geringem Widerstand.**
- **Alle vier JavaScript-Applikationen beinhalten Rundungsfehler! Anscheinend habe ich da noch Defizite.**
- **Ruft man die Applikation: „Brückenschaltung mit fünf Widerständen“ im Standard auf, so wird mit  $U_0$  von **50V** gerechnet. Diese Gleichspannung kann schon **lebensgefährlich** sein.**

**Fehlerfrei kann dieses HTML, CSS & JavaScript Projekt nicht sein. Ohne Gewähr.  
Mai 2026, Hans Busche**