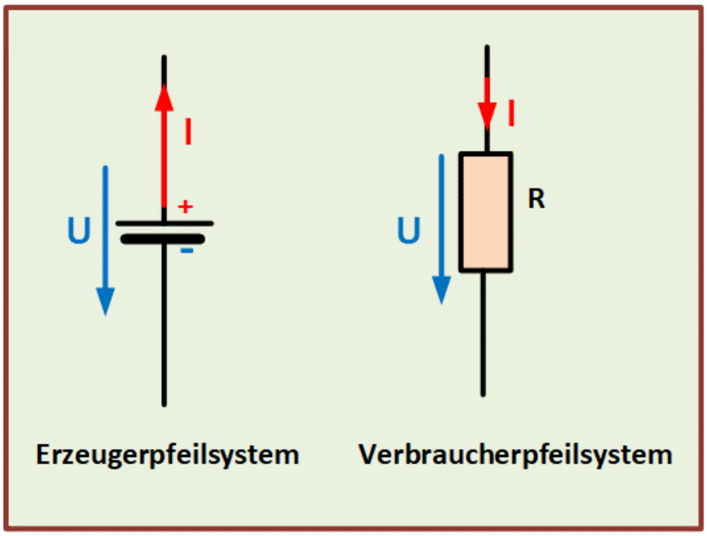
Bezugspfeile für Strom und Spannung. Zählpfeilsystem, als Bezug für eine komplexe Netzwerkberechnung.



Ein *Erzeugerpfeilsystem* liegt vor, wenn die Pfeile von Strom und Spannung in entgegengesetzter Richtung zeigen.

Ein *Verbraucherpfeilsystem* liegt vor, wenn die beiden Pfeile von Strom und Spannung in die gleiche Richtung zeigen.

Spannungspfeil: **Sie geben die Richtung der Spannung am jeweiligen Schaltungselement an. Generell sollten Spannungspfeile vom höheren Potential in Richtung zum niedrigen Potential zeigen.**

Strompfeile: **Sie geben die Richtung des fließenden Stromes an. Generell sollten Strompfeile entlang des Leiters vom Pluspol zum Minuspol zeigen.**

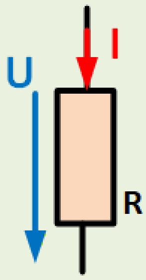
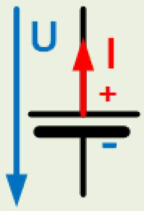
Wird der Akku eins Smartphones aufgeladen, dann ist die Quellenspannung höher als die Spannung des zu ladenden Akkus. Spannung- und Stromrichtung sind eindeutig und entspricht der Definition „oben“. Jedoch bei Netzwerkberechnungen kommen wir mit einer „starren Sicht“ nicht weiter!

Zählpfeilsystem: **Bei sehr komplexen Netzwerken mit vielen Maschen, bestehend aus Widerständen und mehrere Spannungsquellen, können wir vor der Berechnung nicht wissen, wie die tatsächlichen Strom- und Spannungsrichtungen sind. Zählpfeile legen den Bezugssinn für eine Rechnung fest.**
Kernbotschaft: In einer komplexen *Netzwerkberechnung* kann die Richtung der Strom- und Spannungspfeile beliebig gewählt werden. Sie muss dann aber konsequent beibehalten werden. Weiterhin hat das die Konsequenz, dass die Ergebnisse für Strom und Spannung positiv oder negativ sein können. Die wahre Richtung bestimmt das Vorzeichen.

Verbraucherpfeilsystem: **Spannungs- und Strompfeil zeigen in die gleiche Richtung. Der Strom fließt von der Anschlussklemme eines Zweipols in den Zweipol hinein.**

Erzeugerpfeilsystem: **Strom und Spannungspfeile sind in die entgegengesetzte Richtung eingezeichnet. Der Strom fließt vom Generator zur Anschlussklemme. Der Generator oder Akku besitzt eine bestimmte Spannung und liefert einen Strom.**

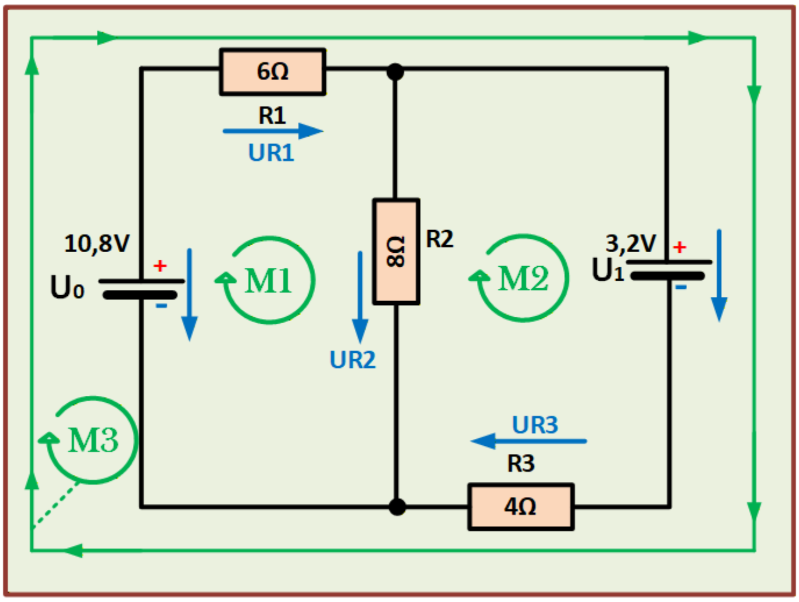
Aber im Endeffekt, für eine Netzwerkberechnung, spielt die die Definition Verbraucher- und Erzeugerpfeilsystem keine große Rolle. Man kann auch für den Generator das Verbraucherpfeilsystem verwenden. Beachten muss man nach der Berechnung wie die Situation für die *Leistung* ist. Siehe nachfolgendes Bild

Leistung P	Verbraucherpfeilsystem	Erzeugerpfeilsystem
		
Für $P = U * I > 0$	Verbraucher	Quelle
Für $P = U * I < 0$	Quelle	Verbraucher

Die Maschenregel.

Beim Durchlaufen einer Masche in einem willkürlich gewählten Durchlaufsinn ist die Summe aller (mit Vorzeichen angegebener) Spannungen gleich Null.

$$U1 + U2 + U3 - U4 \dots + U_n = 0$$



Die Schaltung, Bild oben, besteht aus drei Maschen. Durchlaufrichtung ist im Uhrzeigersinn.

Masche1: **Wir beginnen mit der Spannungsquelle U0 zum Widerstand R1 über den Widerstand R2 zurück zur Spannungsquelle U0.**

$$-U_0 + U_{R1} + U_{R2} = 0$$

Masche2: **Wir beginnen mit der Spannungsquelle U1 zum Widerstand R3 über den Widerstand R2 zurück zur Spannungsquelle U1.**

$$U_1 + U_{R3} - U_{R2} = 0$$

Masche3: **Der Umlauf startet mit U0.**

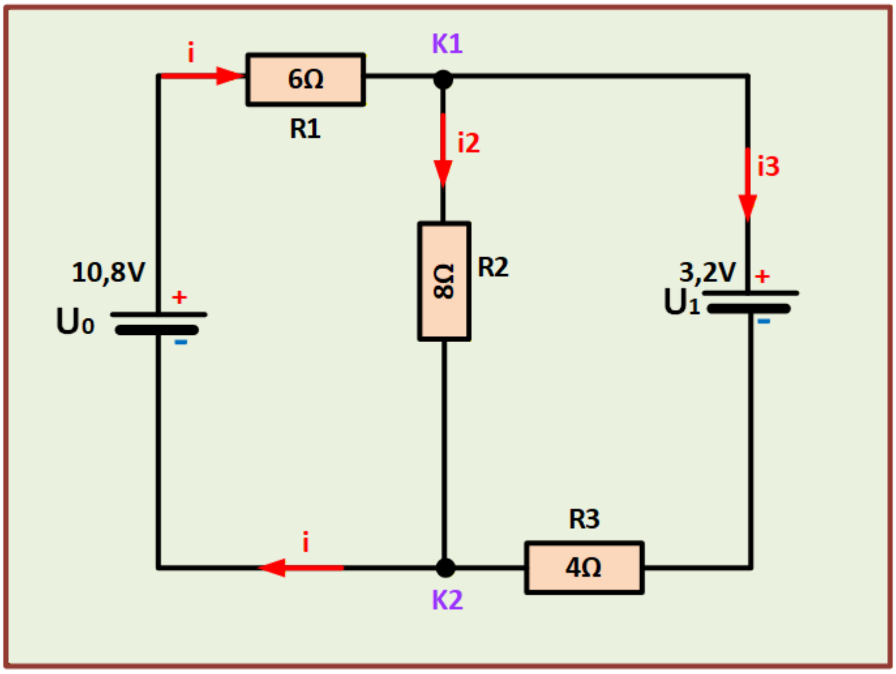
$$-U_0 + U_1 + U_{R3} = 0$$

Um die obige Schaltung zu berechnen, müssen wir die Ströme mit einbeziehen. Von der Maschenregel gehen wir zur Knotenregel!

Die Knotenregel.

In jedem Verzweigungspunkt (Knoten) eines Stromkreises ist die Summe aller (mit Vorzeichen angegebener) Ströme gleich Null.

$$I1 + I2 + I3 - I4 \ldots . + I_n = 0$$



Knoten1:

$$i - i2 - i3 = 0$$

Man könnte auch Knoten2 nehmen!

Berechnen.

Zur Berechnung der drei unbekannten Ströme sind drei Gleichungen notwendig. Wir nehmen die Gleichungen von Masche1 und Masche2 und Knoten1. Die zwei Gleichungen der Masche 1 & 2 verändern wir im Term wie folgt:

$$-U_0 + U_{R1} + U_{R2} = -U_0 + i * R_1 + i_2 * R_2 = 0$$
$$U_1 + U_{R3} - U_{R2} = U_1 + i_3 * R_3 - i_2 * R_2 = 0$$

Wir rechnen mit Zahlen ohne Einheiten weiter:

$$i - i2 - i3 = 0$$
$$-10,8 + i * 6,0 + \ i_2 * 8,0 = 0$$
$$3,2 + i_3 * 4,0 - \ i_2 * 8,0 = 0$$

$$-10,8 + i * 6,0 + \ i_2 * 8,0 = 0$$
$$3,2 + i_3 * 4,0 - \ i_2 * 8,0 = 0$$

Es geht los:

$$i = \ i2 + i3$$
$$-10,8 + 6(i2 + i3) + \ i_2 * 8,0 = 0$$
$$-10,8 + 6 * i2 + 6 * i3 + \ 8 * i_2 = 0$$
$$14 * i2 + 6 * i3 = 10,8$$

$$3,2 + i_3 * 4,0 - \ i_2 * 8,0 = 0$$
$$4 * i_3 - \ 8 * i_2 = -3,2$$

Jetzt haben wir zwei Gleichungen:

$$14i2 + 6i3 = 10,8$$
$$-8i2 + \ 4i3 = -3,2$$

Die zweite Gleichungen nach i3 auflösen:

$$4i3 = -3,2 + 8i2$$
$$i3 = -0,8 + 2i2$$

In die erste Gleichung einsetzen:

$$14i2 + 6i3 = 10,8$$
$$14i2 + 6(-08 + 2i2) = 10,8$$
$$14i2 - 4,8 + 12i2 = 10,8$$
$$26i2 - 4,8 = 10,8$$
$$26i2 = 15,6$$
$$i_2 = 0{,}6\text{A}$$

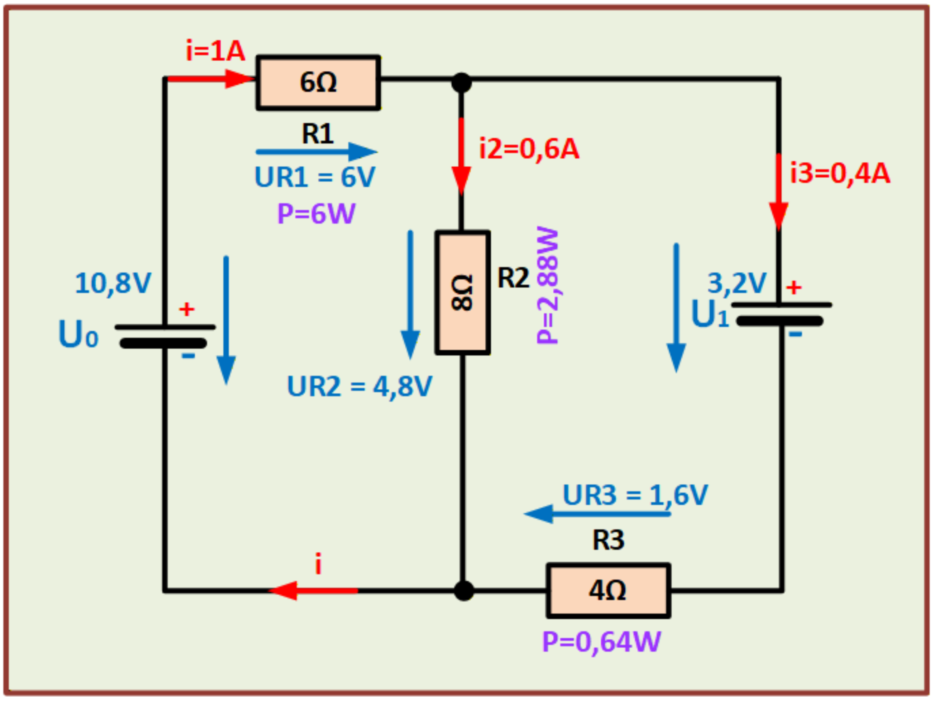
Strom i3 berechnen:

$$i3 = -0,8 + 2i2$$
$$i3 = -0,8 + 2 * 0,6 = 04A$$

Strom i berechnen:

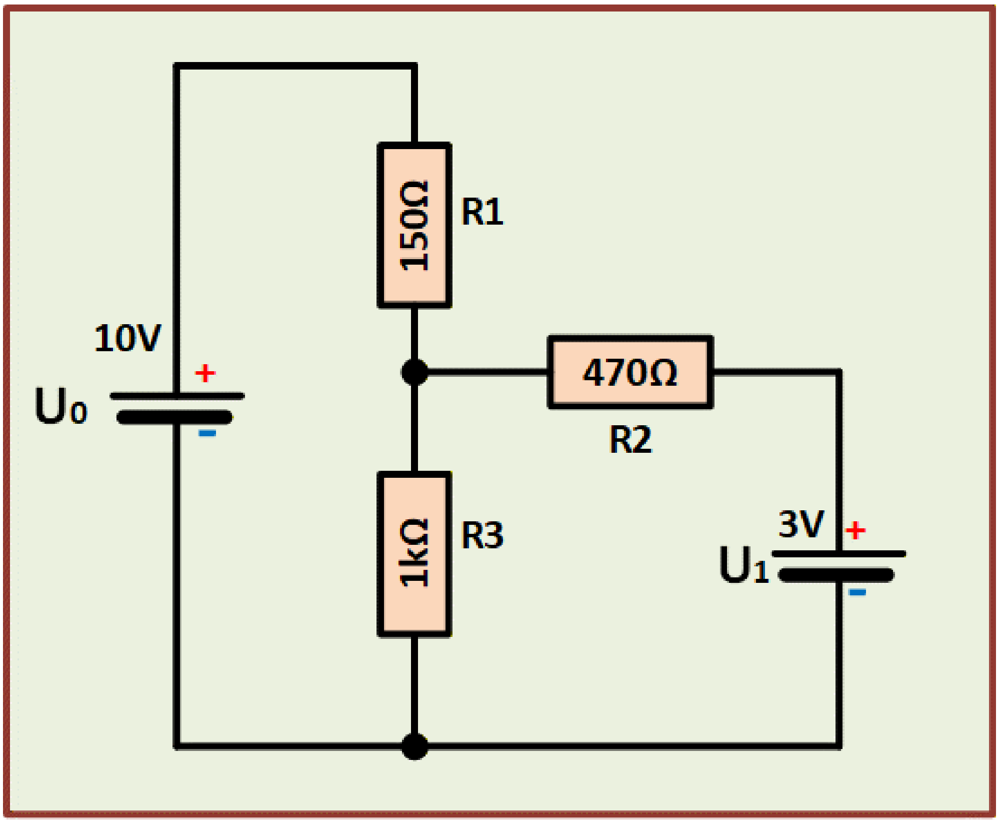
$$i - i2 - i3 = 0$$
$$i = i2 + i3$$
$$i - 0,6 - 0,4 = 1A$$

Es folgt auf der nächsten Seite der Schaltplan:

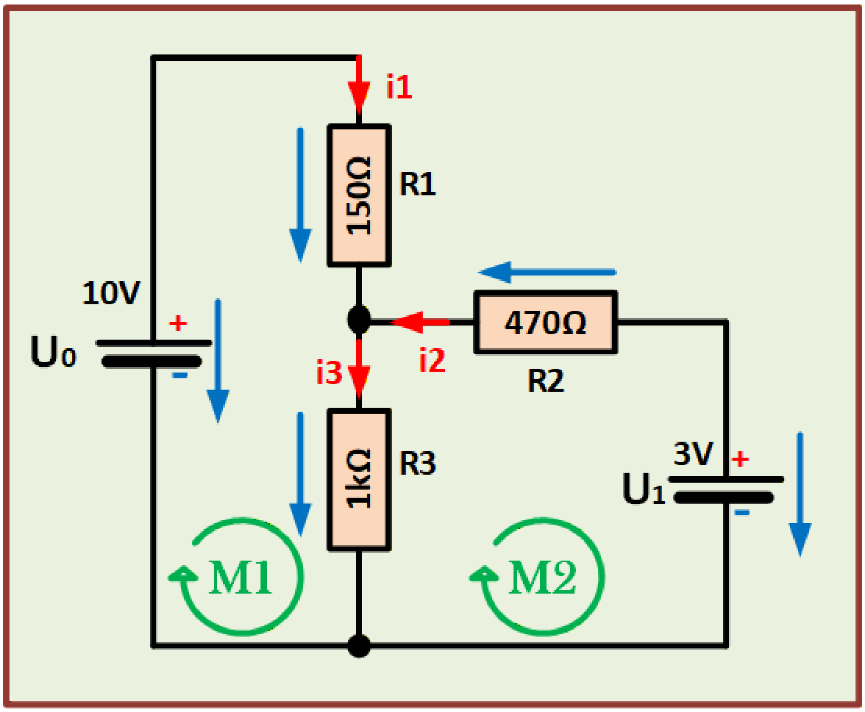


Beispiel 2

Netzwerk: Zwei Spannungsquellen und drei Widerstände.



Gesucht: Die Ströme, Spannungen. Die Leistung, die am Widerstand R1 umgesetzt wird.



Knotenregel Strom: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$

Masche 1: $R_1 * i_1 + R_3 * i_3 - U_0 = 0$

Masche 2: $-R_2 * i_2 + U_1 - R_3 * i_3 = 0$

Wir rechnen mit Zahlen ohne Einheiten weiter:

$$i_1 = i_3 - i_2$$
$$150 * i_1 + 1000 * i_3 - 10 = 0$$
$$150 * i_1 + 1000 * i_3 = 10$$
$$-470 * i_2 + 3 - 1000 * i_3 = 0$$
$$-470 * i_2 - 1000 * i_3 = -3$$
$$1000 * i_3 + 470 * i_2 = 3$$

$$150(i_3 - i_2) + 1000 * i_3 = 10$$
$$150i_3 - 150i_2 + 1000i_3 = 10$$
$$1150i_3 - 150i_2 = 10$$

$$1000 * i_3 + 470 * i_2 = 3$$
$$1150i_3 - 150i_2 = 10$$

kgV(470 und 150)=7050 (15 / 47)

$$15 * 1000 * i_3 + 15 * 470 * i_2 = 15 * 3$$
$$1500 * i_3 + 7045 * i_2 = 45$$
$$47 * 1150i_3 - 47 * 150i_2 = 47 * 10$$
$$54050 * i_3 - 7045 * i_2 = 470$$

Beide Gleichungen addieren, Term i2 entfällt:

$$69050 * i_3 = 515$$
$$i_3 = \frac{515}{69050} = \frac{103}{13810} = 0,00746 = 7,45mA$$

i3 einsetzen, um i2 zu berechnen:

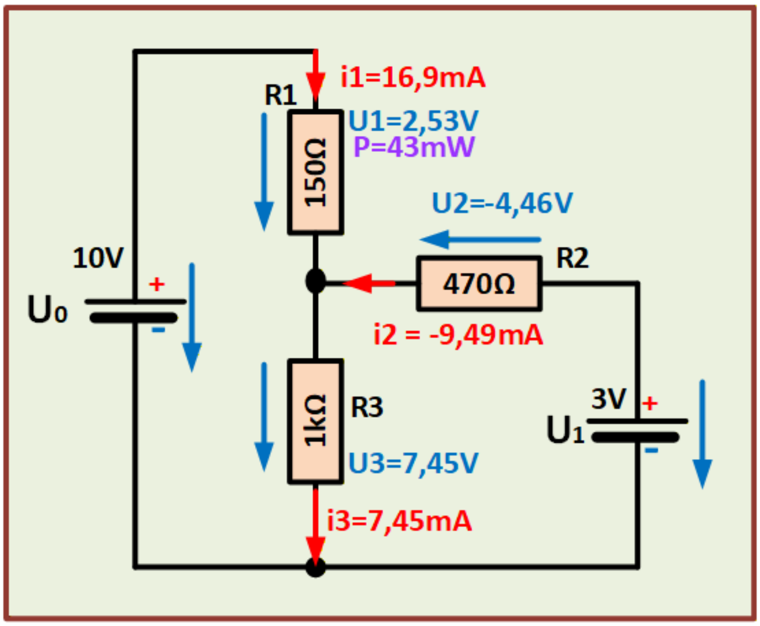
$$1000 * i_3 + 470 * i_2 = 3$$

$$1000 * \frac{103}{13810} + 470 * i_2 = 3$$

$$i_2 = \frac{3 - \frac{103}{13810}}{470} = -0,00945 = -9,45mA$$

$$i_1 = i_3 - i_2$$

$$i_1 = 7,45 - -9,45 = 16,9mA$$



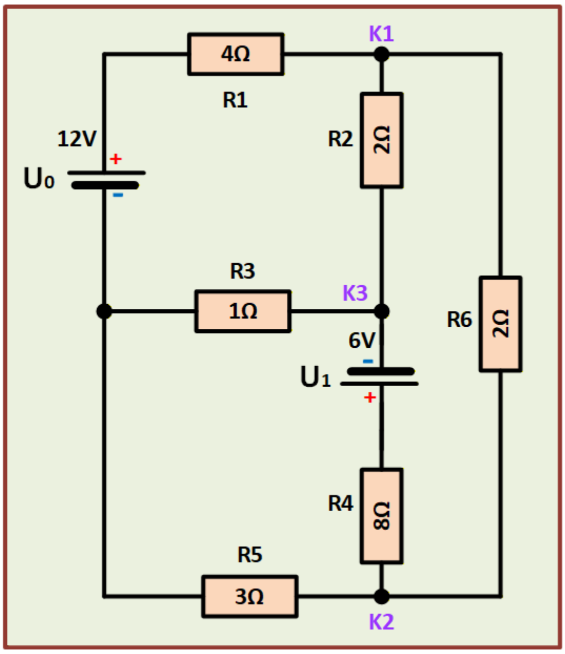
Der Strom $i_2$ist negativ! Ein negativer Strom in einem Widerstandsnetzwerk bedeutet nicht, dass etwas „falsch" gerechnet wurde. Er zeigt nur, dass die tatsächliche Stromrichtung entgegengesetzt zu der Richtung ist, die ich bei der Rechnung angenommen habe. Gerade bei Netzwerken mit mehreren Spannungsquellen passiert das häufig, weil die Quellen gegeneinander arbeiten können.

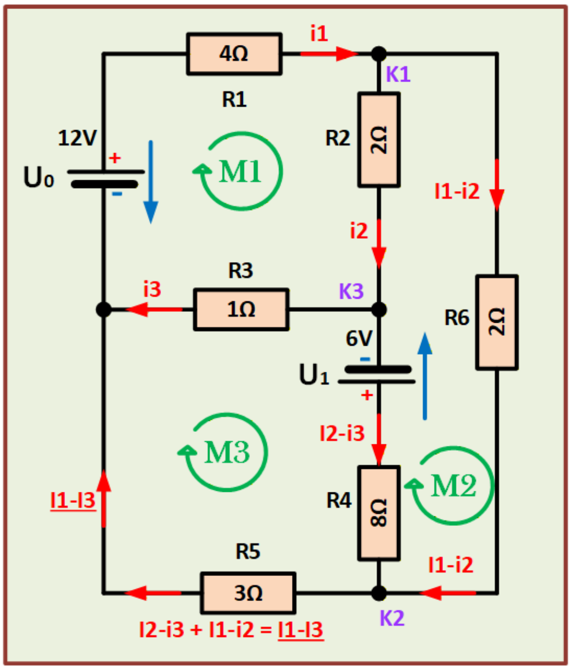
Warum entsteht ein negativer Wert? Beim Aufstellen der Gleichungen (Kirchhoff-Regeln oder Maschen-/Knotenverfahren) musste ich die Stromrichtungen zuerst frei annehmen. Das mathematische Ergebnis prüft dann diese Annahme:
positiv → Annahme war richtig.
negativ → reale Richtung ist umgekehrt.

Dann heißt, dass der Strom $i_2 = -9,49mA$ nicht nach links in den Knoten hineinfließt, sondern nach rechts zur Spannungsquelle U1.

Physikalisch hat das folgende Bedeutung: Die stärkere Spannungsquelle U0 „drückt" den Strom entgegen meiner Annahme. Ein Bauteil kann statt Leistung aufzunehmen auch Leistung abgeben. Bei Quellen kann das bedeuten: Eine Quelle liefert Energie, die andere wird eventuell geladen bzw. nimmt Leistung auf. Was muss ich tun? Das negative Vorzeichen akzeptieren. Die reale Stromrichtung im Schaltbild umdrehen. Den Betrag als tatsächliche Stromstärke verwenden. „Ich mach gar nichts".

Beispiel 3
Netzwerk: Zwei Spannungsquellen und sechs Widerstände





Pfeile für die Spannungen (blau) U0 und U1 werden definiert. Über R1 fließt ein Strom i1. Dieser verzweigt im Knoten K1 zu i2 über R2 und der Rest (i1-i2) fließt über R6. Strom i1 zu K1, i2 und (i1-i2) vom Knoten K1.
Im Knoten K3 verzweigt der Strom i2 in Richtung R3 mit i3. Der Rest (i2-i3) fließt über U1 nach R4. Strom i2 zu K3, i3 und (i2-i3) vom Knoten K3.
(i1-i2) über R6 fließt zum Knoten K2. (i2-i3) fließt ebenfalls zum Knoten K2. Abfließend von K2 über R5 der Strom (i1-i3). Strom (i2-i3) und Strom (i1-i2) zum Knoten K2. (i1-i3) vom Knoten K2.

Mit der Startdefinition i1 wurden alle Ströme eingezeichnet. Die Verzweigungen in den drei Knoten wurden nach den Kirchhoffschen Regeln bereits in „mathematischen Strukturen“ definiert. Das ist die Kernbotschaft dieser Lösung – es gibt mehrere!

Als nächstes werden drei Maschen (M1 bis M3, grün) festgelegt. M1: Uber R1 fällt eine Spannung ab, diese ist in Maschenzählrichtung positiv +(R1 * i1). Die Maschenzählrichtung führt zu R2. Auch hier fällt eine Spannung über R2 ab. Ebenfalls positiv +(R2 * i2). Die Gleichen Verhältnisse haben wir bei R3: Positiv +(R3 * i3). Der Kreislauf der Masche M1

wird beendet mit der Spannung U0, diese ist hier negativ! Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$R1 * i1 + R2 * i2 + R3 * i3 - Uo = 4\Omega * i1 + 2\Omega * i2 + 1\Omega * i3 - 12V = 0$$

Masche M2: Marschrichtung über R6 entspricht +(R6 * (i1-i2)). Danach folgt R4. Achtung negativ: -(R4* (i2-i3)). Nächster Stopp ist U1: Positiv +U1. Der Kreislauf der Masche M2 wird beendet mit R2 * i2 in negativer Richtung. Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$R6 * (i1 - i2) - R4 * (i2 - i3) + U1 - R2 * i2$$
$$= 2\Omega * (i1 - i2) - 8\Omega * (i2 - i3) + 6V - 2\Omega * i2 = 0$$

Masche M3: Start über R3 entspricht -(R3 * i3). Passieren U1 entspricht -U1, negative Richtung. Gelangen zu R4 mit positiver Richtung: +(R4 * (i2-i3)). Beenden die Maschenschleife mit R5, entspricht positive Richtung +(R5 *(i1-i3)). Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$-R1 * i3 - U1 + R4 * (i2 - i3) + R5 * (i1 - i3)$$
$$= -1\Omega * i3 - 6V + 8\Omega * (i2 - i3) + 3\Omega * (i1 - i3) = 0$$

Wir haben drei Gleichungen mit drei Unbekannten (Ströme) das sollte lösbar sein.

Die drei Gleichungen mit Zahlen, ohne Einheiten:

$$4 * i1 + 2 * i2 + i3 - 12 = 0$$
$$2 * (i1 - i2) - 8 * (i2 - i3) + 6 - 2 * i2 = 0$$
$$-i3 - 6 + 8 * (i2 - i3) + 3 * (i1 - i3) = 0$$

Die Gleichungen werden vereinfacht:

1.Gleichung:

$$4i_1 + 2i_2 + i_3 = 12$$

2.Gleichung:

$$2i_1 - 2i_2 - 8i_3 + 6 - 2i_2 = 0$$
$$2i_1 - 12i_2 + 8i_3 + 6 = 0$$
$$2i_1 - 12i_2 + 8i_3 = -6$$

3.Gleichung:

$$-i3 - 6 + 8 * (i2 - i3) + 3 * (i1 - i3) = 0$$
$$3i_1 + 8i_2 - 12i_3 - 6 = 0$$
$$3i_1 + 8i_2 - 12i_3 = 6$$

Drei vereinfachte lineare Gleichungen:

$$4i_1 + 2i_2 + i_3 = 12$$
$$2i_1 - 12i_2 + 8i_3 = -6$$
$$3i_1 + 8i_2 - 12i_3 = 6$$

Die erste Gleichung wird in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$i_3 = 12 - 4i_1 + 2i_2$$
$$2i_1 - 12i_2 + 8(12 - 4i_1 + 2i_2) = -6$$
$$2i_1 - 12i_2 + 98 - 32i_1 - 16i_2 = -6$$
$$-30i_1 - 28i_2 = -102$$

$$15i_1 + 14i_2 = 51$$

Anschließend nochmals die erste Gleichung in die dritte Gleichung einsetzen:

$$i_3 = 12 - 4i_1 + 2i_2$$
$$3i_1 + 8i_2 - 12(12 - 4i_1 + 2i_2) = 6$$
$$3i_1 + 8i_2 - 144 + 48i_1 + 24i_2 = 6$$
$$51i_1 + 32i_2 = 150$$

Folgende Terme sind nun berechnet:

$$15i_1 + 14i_2 = 51$$
$$51i_1 + 32i_2 = 150$$

Erste Gleichung x 16; zweite Gleichung x 7:

$$240i_1 + 224i_2 = 816$$
$$357i_1 + 224i_2 = 1050$$

Subtraktion: $117i_1 = 234$

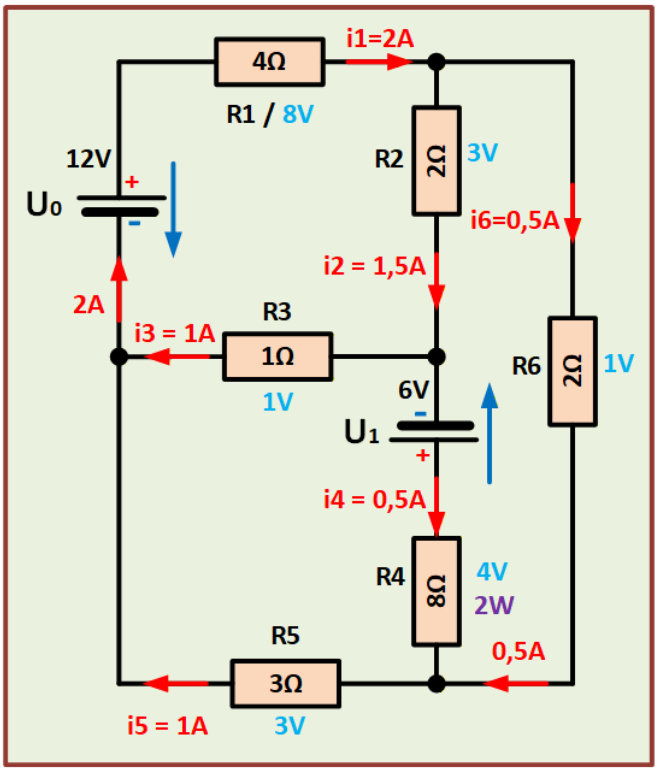
$$i_1 = 2$$

Einsetzen: $15(2) + 14i_2 = 30 + 14i_2 = 51$

$$14i_2 = 21 \rightarrow i_2 = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1,5$$
$$i_3 = 12 - 4(2) - 2\frac{3}{2}$$
$$i_3 = 12 - 8 - 3 = 1$$

Folgende Ströme wurden berechnet: $i_1 = 2A$; $i_2 = 1,5A$; $i_3 = 1A$

Mit diesen drei Strömen können nun alle anderen Ströme ermittelt werden. Weiterhin alle Spannungen und die Leistung. Dafür ergänzen wir das Schaltbild.



Strom: $i_1 = 2A$
Strom: $i_2 = 1,5A$
Strom: $i_3 = 3A$
Strom: $i_4 = i_2 - i_3 = 0,5A$
Strom: $i_5 = i_4 + i_6 = 1A$
Strom: $i_6 = i_1 - i_2 = 0,5A$

Spannung R1: $U_{R1} = R_1 * i_1 = 8V$
Spannung R2: $U_{R2} = R_2 * i_2 = 3V$
Spannung R3: $U_{R3} = R_3 * i_3 = 1V$
Spannung R4: $U_{R4} = R_4 * i_4 = 4V$
Spannung R5: $U_{R5} = R_5 * i_5 = 3V$
Spannung R6: $U_{R6} = R_6 * i_6 = 1V$

Leistung R4: $P_{R4} = U_4 * i_4 = 2W$

Hans Busche, Mai 2026