Logarithmus anwenden!

$2^x=8$ **→ Um diese Gleichung nach x aufzulösen, muss ein neues Werkzeug her! Das Gegenteil von „zwei hoch x“ wäre der Logarithmus. Um eine Variable aus dem Exponenten zu lösen, wendet man den Logarithmus auf beide Seiten der Gleichung an. Man kann hierbei entweder den allgemeinen Logarithmus (dekadischer Logarithmus** lg **oder natürlicher Logarithmus** $\ln$**) oder direkt den Logarithmus zur Basis 2 wählen.**

$$\log_2(2^x)= \log_2(8)$$

Nach den Logarithmen Gesetzen gilt $\log_b(a^n)=n* \log_b(a)$**. Da** $\log_2(2)=1$ **ist, vereinfacht sich die linke Seite direkt zu x:**

$$x= \log_2(8)$$

$x= \log_2(8)=3$ **→ Dieser Lösungsweg kommt zum Tragen, wenn beim Taschenrechner die Basen für den Logarithmus wählbar sind. Besitzt der Taschenrechner nur die Basis 10 (** $\log 10$**) dann sind zwei Rechenschritte erforderlich:**

$$x= \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2}=3$$

Wofür braucht man das? Ich bin von Beruf Elektriker und möchte dir hier zwei Anwendungen vorstellen: Ein Gitarrist möchte die Lautstärke eines Audiosignals erhöhen. Er hat zwei Verstärker zur Auswahl: Verstärker A steigert die Ausgangsleistung (P_{out}) **auf das 50-fache der Eingangsleistung** $(P_{¿})$**. Verstärker B steigert die Ausgangsleistung auf das 100-fache der Eingangsleistung. Die Verstärkung in Dezibel (dB) wird mit der Formel berechnet:**

$$dB=10* \log_{10}\left(\frac{P_{out}}{P_{\text{in}}}\right)$$

Wie viel dB Verstärkung liefert Verstärker A? Wie viel dB Verstärkung liefert Verstärker B? Um wie viel dB ist der Verstärker B besser als der Verstärker A?

$$Verstärker \;\; A(50\text{-}fach) \;\; dB_A=10* \log_{10}(50) \approx 10*1{,}699 \approx 17{,}0 \;\; dB$$

$$Verstärker \;\; B(100\text{-}fach) \;\; dB_B=10* \log_{10}(100)=10*2=20{,}0 \;\; dB$$

$$20{,}0 \;\; dB - 17{,}0 \;\; dB=3{,}0 \;\; dB$$

Obwohl Verstärker B die doppelte Leistung von A liefert (100-fach statt 50-fach), ist er laut Dezibel-Skala nur um 3 dB stärker. Eine Verdoppelung der Leistung entspricht immer nur einen Zuwachs von zirka 3 dB.

Nach dem Bau des Verstärkers hat der Gitarrist noch ein kleines Problem. Die Erhöhung der Lautstärke, mittels Fußtaster, erhöht sich am Anfang als extrem sprunghaft, während sich am Ende des Einstellweges gefühlt kaum noch etwas ändert. Problem: Austausch des linearen Potentiometers gegen ein logarithmisches Poti. Warum? Weil das menschliche

Gehör Schalldruck logarithmisch wahrnimmt. Zum Schluss: In der Nachrichtentechnik (Antennentechnik) spielt der Logarithmus eine sehr wichtige Rolle.

Exponentialfunktion zur Basis x

Ein Exponent, auch Potenz genannt, gibt die wiederholte Multiplikation derselben Größe an. Beispielsweise können wir 2·2·2·2 in Exponentialschreibweise als 2^4 schreiben. 2 hoch 4, wobei 2 die Basis und 4 der Exponent (oder die Potenz) ist. Wir können dies als 2 hoch 4 lesen. Diese Beschreibung behandelt die Eigenschaften von Exponenten, die zur Vereinfachung von Ausdrücken mit Exponenten verwendet werden können.

$$1^0=1 \rightarrow \textit{eins hoch Null ist immer eins, Rechenregel!}$$
$$5^0 = 9^0 = 3^0 = 1$$

$$2^1=2 \rightarrow \textit{Jede Zahl hoch 1 ist immer die Zahl}$$
$$6^1=6 \;;\; 12^1=12 \;;\; 255^1=255$$

$$2^3 * 2^3 = 2^{3+2} = 2^5 = 32 \rightarrow \textit{Addition bei gleicher Basis } [2]$$

$$\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2 \rightarrow \textit{Subtraktion bei gleicher Basis } [2]$$

$$2^3 * 3^3 = (2*3)^3 = 6^3 = 216 \rightarrow \textit{Multiplikation bei gleichem Exponenten } [3]$$

$$\frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 2^3 = 8 \rightarrow \textit{Division bei gleichem Exponenten } [3]$$

Einfaches Beispiel, Berechnung ohne Taschenrechner:

$$\frac{4^8}{8^4 + 8^4} = \frac{(2^2)^8}{(2^3)^4 + (2^3)^4} = \frac{(2^2)^8}{2^1 * (2^3)^4} = \frac{2^{16}}{2^{13}} = 2^{16-13} = 2^3 = 8$$

Negativer Exponent

Ist der Exponent negativ, so bildet man den Kehrwert der Basis und macht den Exponenten positiv.

$$\frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-3} + 2^{-4}} = \frac{\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{16}} = \frac{3}{4} * \frac{16}{3} = 4$$

Exponentialfunktion zur Basis e

Die Exponentialfunktion zur Basis e ist eine natürliche Exponentialfunktion, die auf der Euler-Zahl e ≈ 2,718 basiert. Wofür braucht man die e-Funktion? Beschreibung stetiger Wachstumsprozesse: Sie modelliert Vorgänge, die nicht sprunghaft, sondern kontinuierlich wachsen (z.B. Zinseszins, Bakterienwachstum). Wachstum und Zerfall: Anwendung bei

radioaktivem Zerfall, Abkühlungsvorgängen (negatives Wachstum). Die Exponential-funktion zur Basis e ist in der Elektrotechnik fundamental, um zeitlich veränderliche Vorgänge in Kondensatoren und Spulen zu beschreiben. Ein klassisches Beispiel ist der Entladevorgang eines Kondensators. Ein Beispiel:

Ein Kondensator mit der Kapazität $100\,\mu F$ **(Mikrofarad) ist auf eine Spannung von** $U_0 = 12\,V$ **aufgeladen. Zum Zeitpunkt** $t=0$ **wird er über einen Widerstand** $R=$**10kΩ (Kiloohm) entladen. Frage: Welche Spannung** $U(t)$ **liegt nach einer Zeit von** $t=2\,s$ **(Sekunden) noch am Kondensator an?**

Gegebene Werte berechnen:

$$U_0 = 12\,V \quad (Anfangsspannung)$$
$$R = \ 10\,k\Omega = 10 * \ 10^3\,\Omega = \ 10000\,\Omega$$
$$C = \ 100\,\mu F = 100 * \ 10^{-6}\,F = 0{,}0001\,F$$
$$t = 2\,s$$

Zeitkonstante τ (Tau) bestimmen:

$$\tau = R * C = 10000\,\Omega * 0{,}0001\,F = 1 \ \ s$$

Das bedeutet, nach einer Sekunde ist die Spannung auf 37% gefallen.

$$u(t) = \ U_o * \ e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$U_{(2s)} = U_C = \ U_o * \ e^{-\frac{t}{\tau}} = 12\,V * \ e^{-\frac{2\,s}{1\,s}} = 12\,V \ \ e^{-2} = 12 * 0{,}1353 \ \approx 1{,}62\,V$$

Nach 2 Sekunden ist die Spannung am Kondensator auf ca. 1,62 Volt abgesunken.
Warum e-Funktion: Der Kondensator entlädt sich nicht linear (gleichmäßig), sondern am Anfang sehr schnell und je leerer er wird, desto langsamer fließt der Strom. Der natürliche Logarithmus/e-Funktion beschreibt diesen Vorgang, bei dem die Änderung proportional zum momentanen Zustand ist.

N-te Wurzel

$\sqrt[n]{a} \rightarrow Wurzel \rightarrow sprich \ \ "n\text{-}te \ \ Wurzel \ \ von \ \ a"$

$\sqrt[n]{a} \rightarrow Wurzelzeichen; \ \ a \rightarrow Radikand; n \rightarrow Wurzelexponent$

Wurzel addieren. Voraussetzung: Gleicher Radikand, gleicher Wurzelexponent.

$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b)\sqrt[n]{x}$

$3\sqrt{4} + 2\sqrt{4} = (3+2)\sqrt{4} = 5\sqrt{4} = 5*2 = 10$

Wurzel subtrahieren. Voraussetzung: Gleicher Radikand, gleicher Wurzelexponent.

$a\sqrt[n]{x} - b\sqrt[n]{x} = (a-b)\sqrt[n]{x}$

$4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (4-3)\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Wurzeln multiplizieren. Voraussetzung: Falls die Wurzelexponenten unterschiedlich sind, muss man die Wurzeln gleichnamig machen, um eine Multiplikation zu ermöglichen.

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b}$

$\sqrt{2} * \sqrt{2} = \sqrt{2 * 2} = \sqrt{4} = 2$
$\sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 * 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

Wurzeln dividieren. Voraussetzung: Falls die Wurzelexponenten unterschiedlich sind, muss man die Wurzeln gleichnamig machen, um eine Division zu ermöglichen.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Wurzeln potenzieren.

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$(\sqrt[2]{2})^3 = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8} = 2{,}829$

Wurzeln radizieren.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a} \qquad \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2*2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$

Fehlerfrei kann dieses Projekt nicht sein. Ohne Gewähr.
April 2026, Hans Busche